

**Ю.Л. МУРОМЦЕВ, Д.Ю. МУРОМЦЕВ**

**ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ И  
СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ**

**Часть 1**

◆ **ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ** ◆

УДК 681.5(075)

ББК  $\zeta$ 965я73

М915

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор ТВВАИУ радиоэлектроники

*В.И. Павлов*

Доктор технических наук, профессор ТГТУ

*В.А. Погонин*

**Муромцев, Ю.Л.**

М915 Основы автоматики и системы автоматического управления : учебное пособие / Ю.Л. Муромцев, Д.Ю. Муромцев. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – Ч. 1. – 96 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-0680-6

Содержатся разделы автоматического управления: статические и динамические характеристики объектов, анализ и синтез линейных непрерывных систем. Основное внимание уделяется вопросам устойчивости и качества работы систем автоматического управления.

Предназначено для студентов дневного (3, 4 курсы) и заочного (5 курс) отделений специальности 210201, а также магистрантов (6 курс) и обучающихся по системе дистанционного образования при изучении дисциплин "Основы автоматики и системы автоматического управления", "Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов", "Анализ технических систем".

УДК 681.5(075)

ББК  $\Phi$ 965я73

ISBN 978-5-8265-0680-6

© ГОУ ВПО "Тамбовский государственный  
технический университет" (ТГТУ), 2008

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

**Ю.Л. Муромцев, Д.Ю. Муромцев**

# **ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Часть 1**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации для студентов 3 – 5 курсов дневного и заочного отделений бакалавров и специальности 210201, магистрантов направления 210200 и обучающихся по системе дистанционного образования*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2008

Учебное издание

МУРОМЦЕВ Юрий Леонидович  
МУРОМЦЕВ Дмитрий Юрьевич

# ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Часть 1

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова  
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано к печати 16.04.2008  
Формат 60 × 84/16. 5,58 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 118

Издательско-полиграфический центр  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматического управления применяется не только к технологическим объектам, но и к задачам управления предприятиями, процессам принятия решений, системам массового обслуживания и другим сложным системам. За последние десятилетия радиотехнические системы и средства автоматизации претерпели существенные изменения, возникли новые задачи для их решения автоматическими устройствами. Эти задачи связаны с работой систем при случайных изменениях состояния, возрастанием роли радиоэлектронной борьбы, развитием систем пространственно-временной обработки и распределенных вычислений, необходимостью оперативного принятия решений в условиях неопределенности, широким использованием микропроцессорных средств, телекоммуникационного взаимодействия и другими усовершенствованиями. В связи с переходом к рыночным отношениям неизмеримо возросли требования к эффективности и конкурентоспособности систем, а следовательно, к робастности и отказоустойчивости систем автоматического управления (САУ), проблемам их проектирования.

Следует отметить, что современные САУ тесно связаны с такими направлениями развития систем телекоммуникации и связи, как цифровая обработка сигналов, теория фильтрации, беспроводные системы связи и др. САУ широко используются при создании роботов, самонаводящихся систем, оптико-локационных станций и т.д. Возрастает сложность задач, решаемых управляющими устройствами. Так, на современных самолетах устанавливаются радиолокационные станции (РЛС), оборудованные антеннами с активной фазированной решеткой, автоматическая система антенного комплекса обеспечивает практически одновременное функционирование РЛС в разных режимах и разных частотных диапазонах – в одном режиме как обычный локатор, в другом – постановщик помех для "глушения" РЛС других летательных аппаратов.

Широкое распространение получили различные информационные технологии для проектирования и использования в САУ (CASE-средства, SCADA-системы, беспроводные технологии и др.).

В первом разделе пособия кратко рассмотрены общие сведения по системам автоматического управления и примеры САУ. Второй раздел, посвященный линейным САУ, в определенном смысле является основным.

Основные методы анализа и синтеза систем управления подкрепляются численными примерами. Вместе с тем объем пособия не позволил с достаточной полнотой рассмотреть все методы синтеза систем автоматического управления, использующие сложный математический аппарат.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под автоматикой понимают отрасль науки и техники, которая охватывает теорию и принципы построения систем управления техническими процессами, действующих без непосредственного участия человека. Математические основы теории автоматического регулирования заложены отечественными учеными И.А. Вышнеградским и А.М. Ляпуновым.

Содержанием автоматикой как науки являются: исследование условий функционирования различных объектов и алгоритмов управления ими, изучение общих закономерностей САУ, разработка методов анализа и синтеза САУ, разработка принципов построения автоматических управляющих устройств. При синтезе решаются задачи выбора наиболее рациональных структур САУ, которые должны обеспечивать выполнение заданных алгоритмов функционирования. Важной задачей анализа является определение по заданной структуре САУ алгоритма функционирования и показателей качества работы системы.

В дисциплине изучаются САУ, применяемые в различных радиотехнических комплексах, системах и устройствах, предназначенных для радиолокации, радионавигации, радиуправления и радиосвязи, т.е. системах, использующих радиосигналы. Сфера применения таких систем непрерывно расширяется, появляются новые виды радиоустройств, обеспечивающих дистанционное управление объектами.

### 1.1. СОСТАВ И СХЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для нормального функционирования многих объектов и процессов, т.е. чтобы они выполняли свое целевое предназначение, ими требуется управлять. Управление заключается в том, чтобы на основе имеющейся информации вырабатывать воздействия на объект, которые изменяют протекающие в нем процессы для достижения задаваемой цели управления. Следует отметить, что цели управления формулируют не разработчики автоматических систем (АС), а специалисты в области техники и знаний, к которой относится объект (технологический процесс). Целями управления могут быть, например, обеспечение постоянства частоты генератора, стабилизация напряжения на выходе блока питания, устранение ошибки радиолокатора при слежении за целью и т.д.

Объект (процесс) находится под автоматическим управлением, если цели управления достигаются при редком вмешательстве человека. Для реализации автоматического управления используются различные сигналы и элементы АС.

*Сигналами* называются физические процессы, параметры которых содержат информацию (информационные параметры). Например, сигнал – напряжение переменного тока, информационный параметр – частота. Основными сигналами в АС являются входные  $x(t)$  и выходные  $y(t)$  сигналы, в общем случае изменяющиеся во времени  $t$ . *Входными сигналами* наиболее часто являются задающее воздействие или заданное значение выходного сигнала  $y_{зад}(t)$  и возмущающие воздействия  $v(t)$ . В дальнейшем входные и выходные сигналы будут рассматриваться как для всей автоматической системы, так и ее отдельных частей или элементов. При этом выходной сигнал одного элемента обычно является входным сигналом следующего элемента. Например, выходной сигнал управляющего устройства является входным для объекта управления. При анализе и синтезе АС большое значение имеет исследование таких сигналов, как помехи, шумы, сигналы ошибки и обратной связи. На схемах АС сигналы обозначаются стрелками. Каждый сигнал описывается своей математической моделью, например, алгебраической функцией, случайным процессом и др. Различают сигналы аналоговые,

если информационные параметры сигнала при изменении во времени могут принимать любые значения в задаваемом интервале, и цифровые, если информационные параметры содержатся в кодированной последовательности импульсов. В дальнейшем сигналы  $x(t)$ ,  $y(t)$  будут называться входной и выходной переменными или просто входом и выходом системы.

При рассмотрении систем автоматического управления первоначально исследуется объект (процесс), которым надо управлять, и цель управления. В объекте выделяют протекающие в нем физические процессы и модели, описывающие эти процессы. Формулировка цели управления должна включать: чего требуется достичь в результате управляющих воздействий (высокой производительности, точности и т.п.), какими переменными следует управлять, какой необходим уровень действий.

Элементы, образующие автоматическую систему, как правило, обладают свойством однонаправленности, т.е. сигнал, поступающий на вход элемента, преобразуется в нем в выходной сигнал. Важную роль в автоматических системах играют следующие элементы: датчики, элементы сравнения, управляющие устройства, исполнительные механизмы, линии связи. Датчики позволяют оценивать состояние управляемого объекта. Если необходимые для целей управления переменные недоступны непосредственному измерению, то во многих случаях необходимую информацию получают из других источников, используя так называемые виртуальные датчики.

Исполнительные механизмы выполняют функцию перевода объекта (процесса) из текущего состояния в желаемое в соответствии с сигналами, вырабатываемыми устройствами обработки информации. В качестве этих устройств используются разнообразные вычислительные средства – программируемые контроллеры, ломиконты и др.

Для соединения между собой датчиков, управляющих устройств, исполнительных механизмов и объектов управления используются различные линии связи, к которым предъявляются требования по отсутствию искажений и задержек при передаче сигналов. Во многих случаях сигналы в САУ передаются на большие расстояния, что накладывает дополнительные требования к линиям связи – их надежности, помехоустойчивости и т.д.

Необходимо отметить, что в связи с широким использованием микропроцессорной техники в САУ, важной составной частью автоматических систем стало программное обеспечение автоматического управляющего устройства. Более того, наблюдается тенденция замены некоторых аппаратных средств программными средствами.

Выделяют три основных принципа, используемых при управлении объектами [1, 2].

1. *Принцип разомкнутого управления* или разомкнутого цикла. В системах, работающих по этому принципу, реальные значения выхода  $y(t)$  объекта не учитываются управляющим устройством, что не позволяет обеспечить высокую точность управления (рис. 1.1, а).

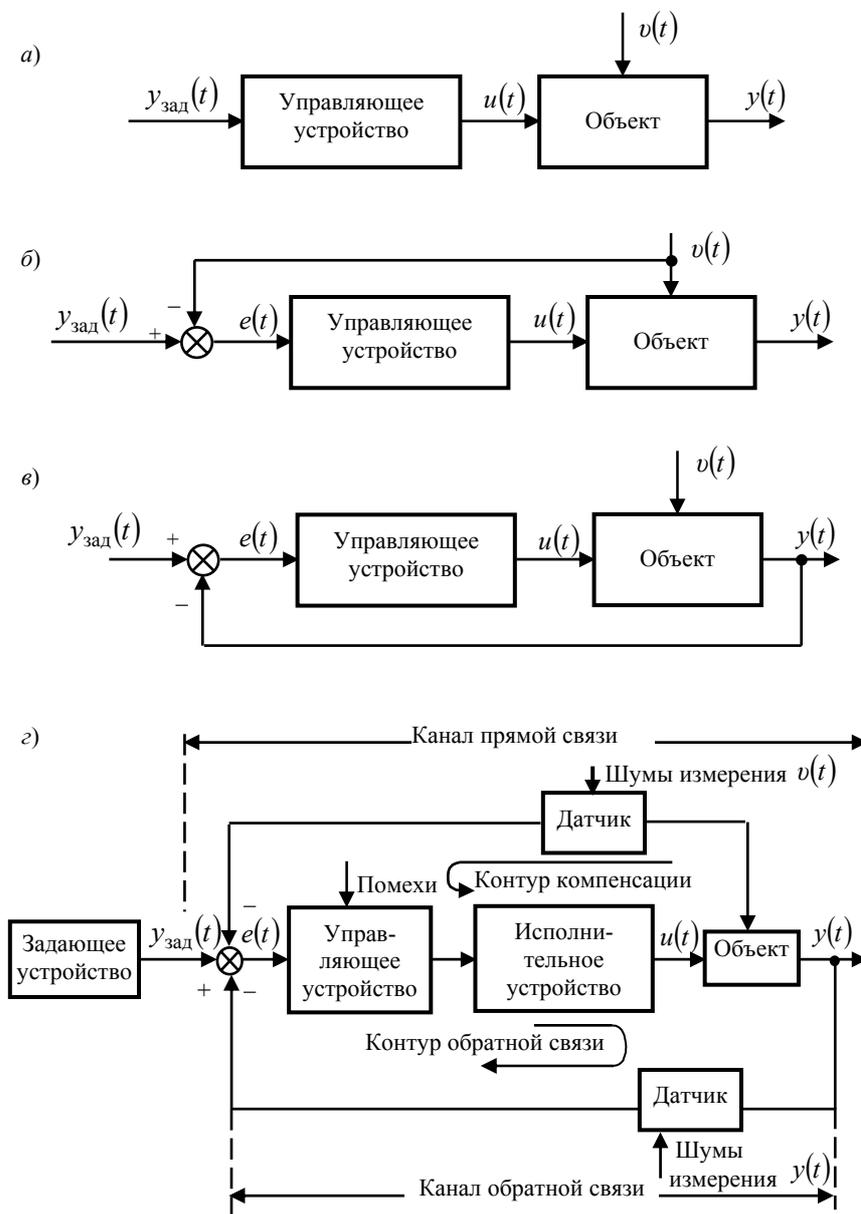
2. *Принцип компенсации* или управления по возмущению. В этих системах производится измерение возмущающих воздействий  $v(t)$ , и результаты измерений учитываются при выработке управления  $u(t)$ , что позволяет повысить точность автоматической системы (рис. 1.1, б).

3. *Принцип обратной связи* (ОС), который предусматривает сравнение выхода  $y(t)$  с задаваемым значением  $y_{\text{зад}}(t)$  с помощью канала обратной связи и элемента сравнения (рис. 1.1, в).

Для повышения качества управления объектом в АС могут использоваться комбинация принципов ОС и компенсации, такие системы называют комбинированными (рис. 1.1, г).

Каналы прямой и обратной связей в АС образуют основной контур управления (рис. 1.1, г). Значение выходной (управляемой) переменной  $y(t)$  объекта на элементе сравнения постоянно сопоставляется с заданным (эталонным) значением  $y_{\text{зад}}(t)$ . Сигнал ошибки  $e(t) = y_{\text{зад}}(t) - y(t)$  используется для выработки управления  $u(t)$ , чтобы достичь цели управления – сделать  $y_{\text{зад}}(t)$  и  $y(t)$  наиболее близкими, несмотря на возмущения различного рода, помехи и шумы.

Изменения выхода  $y(t)$  вызываются не только управляющими  $u(t)$ , но и возмущающими воздействиями  $v(t)$ . Последние стремятся нарушить требуемую функциональную связь между  $u(t)$  и  $y(t)$ . Например, порывы ветра оказывают значительное влияние на положение антенны радиолокационной станции.



**Рис. 1.1. Схемы автоматических систем:**

*a* – разомкнутая; *б* – с компенсацией по возмущению;  
*в* – с обратной связью; *г* – комбинированная

В общем случае под *системой автоматического управления* понимается активная динамическая система, стремящаяся сохранять в допустимых пределах отклонение  $e(t)$  между требуемым  $y_{\text{зад}}(t)$  и действительным  $y(t)$  значениями управляемой переменной при помощи их сравнения на основе принципа ОС и использования получающегося при этом сигнала для управления объектом.

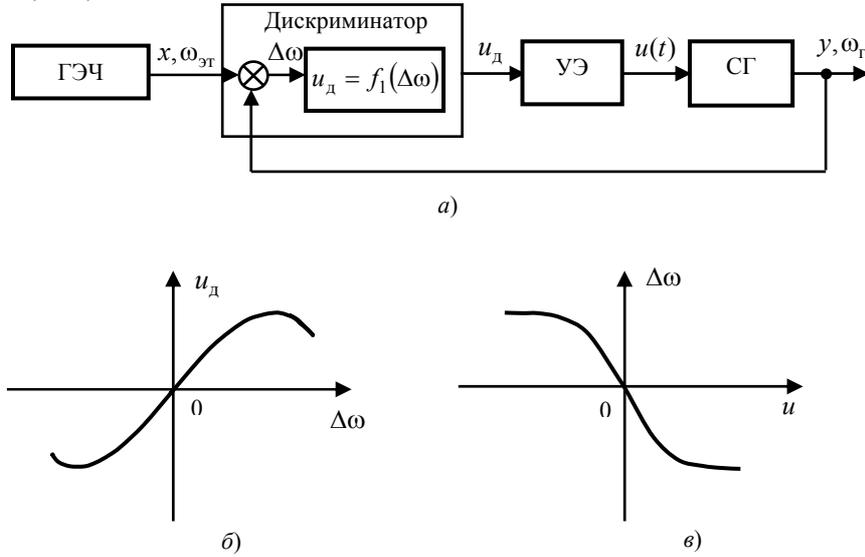
В зависимости от характера изменения  $y_{\text{зад}}(t)$  выделяют три основных типа САУ: 1) системы автоматической стабилизации и регулирования, в них  $y_{\text{зад}}(t) = \text{const}$ ; 2) системы программного управления, в этих системах  $y_{\text{зад}}(t)$  изменяется в соответствии с известной функцией времени или программой; 3) следящие системы, здесь  $y_{\text{зад}}(t)$  представляют собой неизвестные заранее функции времени. Наряду с этими САУ широко используются системы оптимального управления, экстремальные системы и др.

## 1.2. ПРИМЕРЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В РАДИОСВЯЗИ

Современные радиотехнические комплексы, решающие задачи управления движением различных летательных аппаратов и слежения за ними, обеспечения радиосвязью, функциями радиоэлектронной борьбы и защиты от помех, а также другие комплексы, использующие радиосигналы для самонаведения, определения местоположения объектов, обследования рельефа местности и т.д., содержат большое число автоматических устройств, обеспечивающих их нормальное функционирование. К этим устройствам, прежде всего, относятся системы: автоматической подстройки частоты (АПЧ); фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ); автоматической регулировки усиления (АРУ); автоматического сопровождения по направлению (АСН) движущихся объектов; автоматического сопровождения по дальности (АСД) движущихся объектов; автомати-

ческого слежения за временем (АСВ) прихода импульсов и др. Перечисленные устройства входят в состав различных радиолокационных станций (РЛС), систем радиоуправления, спутниковых радионавигационных систем и других радиотехнических систем.

**Пример 1.1.** Устройства автоматической подстройки частоты широко применяются в различных радиопередающих и радиоприемных устройствах. Простейшая схема системы АПЧ для стабилизации частоты генератора приведена на рис. 1.2, а. Здесь формально роль  $\omega_{зад}$  играет эталонная частота  $\omega_{эт}$ , соответствующий сигнал вырабатывается генератором эталонных частот (ГЭЧ).

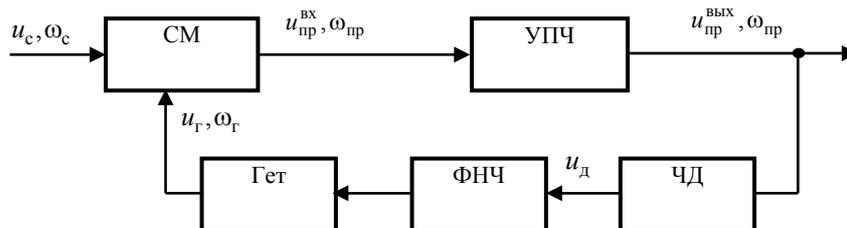


**Рис. 1.2.** Схема АПЧ генератора (а) и статические характеристики дискриминатора (б) и управляющего элемента (в)

Если частота  $\omega_{Г}$  стабилизируемого генератора (СГ) отличается от задаваемой эталонной частоты  $\omega_{эт}$ , то в зависимости от разности  $\Delta\omega = \omega_{Г} - \omega_{эт}$  дискриминатор вырабатывает сигнал управления  $u_d$ , который через управляющий элемент (УЭ) корректирует частоту генератора. Для этого используется зависимость  $u_d = f_1(\Delta\omega)$  значения сигнала  $u_d$  на выходе дискриминатора от ошибки  $\Delta\omega$ , называемая статической характеристикой дискриминатора (рис. 1.2, б). Под действием управляющего воздействия  $u$  на выходе управляющего элемента рассогласование  $\Delta\omega$  устраняется в соответствии со статической характеристикой  $\Delta\omega = f_2(u)$  (рис. 1.2, в).

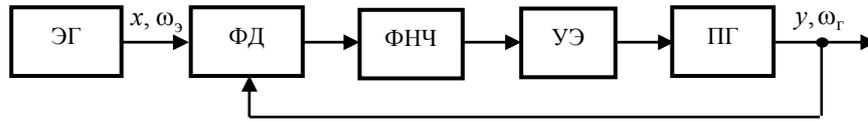
Следует заметить, что в некоторых системах АПЧ частота  $\omega_{Г}$  поддерживается постоянной, отличающейся от  $\omega_{эт}$  на строго фиксированную величину.

В приемном устройстве РЛС основное усиление принятого отраженного сигнала  $u_c(t)$  осуществляется усилителем промежуточной частоты (УПЧ) на промежуточной частоте  $\omega_{пр} = \omega_c - \omega_{Г}$ ; здесь  $\omega_c$  – частота входного сигнала;  $\omega_{Г}$  – частота гетеродина. Преобразование  $u_c(t)$  в  $u_{пр}(t)$  происходит в смесителе (СМ). Вследствие нестабильности частота гетеродина  $\omega_{Г}$  и влияния других дестабилизирующих факторов частота  $\omega_{пр}$  может отличаться от номинального значения  $\omega_{пр,н}$ , что приводит к ухудшению работы приемного тракта. Для устранения отклонения частоты от номинального, т.е.  $\Delta\omega = \omega_{пр} - \omega_{пр,н}$ , в частотном дискриминаторе (ЧД) вырабатывается напряжение  $u_d$ . Характеристика дискриминатора имеет вид, аналогичный показанному на рис. 1.2, б. Если  $\Delta\omega \neq 0$ , то управляющий сигнал  $u_d$  через фильтр низких частот (ФНЧ) воздействует на гетеродин (Гет), чтобы обеспечить  $\omega_{пр} = \omega_{пр,н}$ . На рис. 1.3 приведена структурная схема АПЧ, обеспечивающая поддержание на заданном уровне промежуточной частоты  $\omega_{пр}$ .



**Рис. 1.3.** Схема АПЧ усилителя промежуточной частоты приемного устройства РЛС

**Пример 1.2.** Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) используются в перестраиваемых по частоте генераторах колебаний и радиоприемных устройствах. На рис. 1.4 приведена схема ФАПЧ перестраиваемого генератора (ПГ). Измерителем рассогласования здесь служит фазовый дискриминатор (ФД), на выходе которого сигнал пропорционален разности фаз напряжений эталонного опорного генератора (ЭГ) частотой  $\omega_3$  и перестраиваемого генератора (ПГ) частотой  $\omega_r$ . Выработываемый ФД сигнал через фильтр нижних частот (ФНЧ) и управляющий элемент (УЭ) подается на ПГ. В результате происходит изменение частоты ПГ, при этом устраняется разность фаз двух гармонических колебаний и частота ПГ становится равной частоте ЭГ.



**Рис. 1.4. Схема фазовой автоподстройки частоты перестраиваемого генератора**

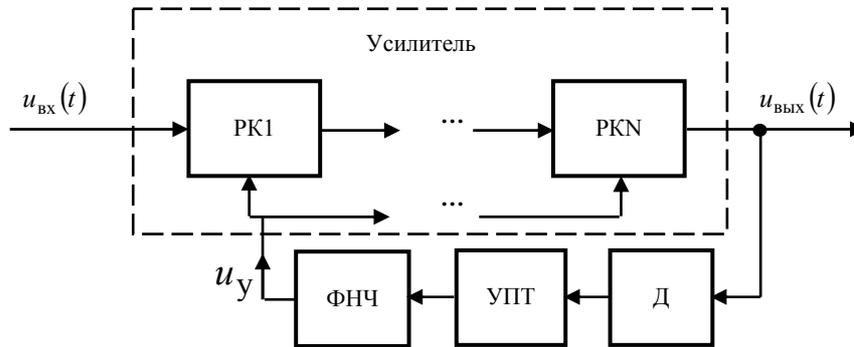
Процесс автоподстройки в системе ФАПЧ описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} + \omega_{уд} F(\Delta(t)) = \Delta\omega_n ;$$

здесь  $\Delta\omega_n = \omega_3 - \omega_{r,n}$  – начальное рассогласование частот ЭГ и ПГ;  $\omega_{r,n}$  – начальная частота ПГ;  $F(\Delta(t))$  – дискриминационная характеристика ФД;  $\omega_{уд}$  – полоса удержания системы, т.е. максимальное значение  $\Delta\omega_n$ , которое может быть скомпенсировано в системе. В установившемся режиме разность фаз  $\Delta$  постоянна и  $\omega_r = \omega_3$ .

**Пример 1.3.** В радиоприемных устройствах для стабилизации уровня выходного сигнала  $u_{вых}(t)$  при больших изменениях уровня входного сигнала  $u_{вх}(t)$  широко применяется автоматическая регулировка усиления (АРУ). Так, в РЛС диапазон изменения  $u_{вх}(t)$  может составлять 60...100 дБ, отсутствие или нарушение работы АРУ здесь может приводить к срыву сопровождения цели [3].

На рис. 1.5 приведена схема системы АРУ для усилителя с регулируемыми каскадами РК1, ..., РКN. Выходное напряжение усилителя  $u_{вых}(t)$  через детектор (Д) подается на усилитель постоянного тока (УПТ) и затем фильтр (Ф). Напряжение  $u_y$  с выхода фильтра воздействует на коэффициент усиления усилителя.



**Рис. 1.5. Схема системы АРУ**

Рассмотренные примеры автоматических устройств представляют собой системы с одним входом и одним выходом или SISO-системы (Single-Input Single-Output) [4]. Как видно из примеров, канал обратной связи здесь может содержать различные функциональные элементы – дискриминаторы, усилители, фильтры и др. Техническая реализация этих элементов сильно различается в зависимости от частотного диапазона, в котором функционирует соответствующая система.

Если в качестве примера взять какой-либо радиотехнический комплекс, то он, как правило, имеет несколько входов и несколько выходов. При этом отдельные входы могут оказывать влияние на разные выходы, а некоторые выходы зависят от нескольких входов. Такие комплексы рассматриваются с позиции MIMO-систем (Multi-Input Multi-Output).

Некоторые САУ имеют один вход и несколько выходов (SIMO-системы) или несколько входов и один выход (MISO-системы). Например, наземная РЛС, предназначенная для слежения за воздушной целью, может рассматриваться как SIMO-система. Здесь на вход поступает отраженный от цели сигнал, а на выходах вырабатывается информация о дальности до цели и направлении на цель.

### 1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Системы автоматического управления классифицируются по различным признакам. В разделе 1.1 были рассмотрены системы, различающиеся используемым принципом управления, т.е. разомкнутые, с компенсацией по возмущению, с обратной связью и комбинированные. Там же выделены три типа САУ с различным характером изменения заданного значения выходной переменной – это системы программного управления, автоматической стабилизации и следящие. В

разделе 1.2 определены системы, различающиеся числом входов и выходов (SISO-, MIMO-, MISO- SIMO-системы), а также приведены примеры автоматических устройств, выполняемых разные функции. Для решения задач анализа и синтеза САУ наиболее важными по характеру внутренних динамических процессов в системе являются следующие классификационные признаки: линейность (или нелинейность) уравнений, описывающих динамические процессы; непрерывность (или дискретность) динамических процессов во времени; стационарность (нестационарность) и сосредоточенность (распределенность) параметров системы, а также особенности работы при различных состояниях функционирования.

САУ называется линейной, если динамические процессы в ней описываются линейными дифференциальными или разностными уравнениями. Статические характеристики всех звеньев системы должны быть линейными. Если динамика какого-либо звена САУ описывается линейным уравнением с временной задержкой, то такая система называется линейной системой с временным запаздыванием. В уравнение, описывающее процессы в *линейной* системе, все переменные (входные, выходные, фазовые координаты) входят аддитивно и в первой степени. Например, уравнение динамики линейной системы в векторно-матричной форме имеет вид

$$\dot{z} = Az(t) + Bx(t), \quad y(t) = Cz(t) + Dx(t), \quad (1.1)$$

а при наличии временного запаздывания  $\tau$  по каналу входного воздействия

$$\dot{z} = Az(t) + Bx(t - \tau); \quad (1.2)$$

здесь  $z, x, y$  – векторы фазовых координат, входа и выхода;  $A, B, C, D$  – матрицы параметров соответствующих размерностей;  $\dot{z} = dz/dt$ .

Если хотя бы в одном звене САУ условие линейности не выполняется ( $z$  или  $x$  в уравнении записываются не в первой степени или в виде произведения и т.п.), то система называется *нелинейной*. Например,

$$\dot{y} = ay(t) + b\sqrt{x(t)}, \quad (1.3)$$

где  $x, y$  – скалярные вход и выход;  $a, b$  – параметры модели системы.

Во многих случаях используется линеаризация нелинейных систем в окрестности некоторой рабочей точки. Таким образом, по характеру связей между переменными системы и их производными все САУ делятся на два больших класса – линейные и нелинейные. В качестве отдельного подкласса здесь могут быть выделены линеаризованные системы.

САУ называется *системой непрерывного действия*, если во всех ее звеньях непрерывным изменениям входных величин соответствуют непрерывные изменения выходных переменных. Одно из условий непрерывных систем заключается в том, чтобы статические характеристики звеньев в них были непрерывными. Модели (1.1) – (1.3) соответствуют САУ непрерывного действия.

Если в САУ имеются звенья, в которых при непрерывном изменении входной величины выходная имеет вид последовательности импульсов, то система относится к классу систем дискретного действия. К этому классу относятся системы импульсного регулирования, системы с ЭВМ в контуре управления и др. Динамические режимы дискретных АС описываются разностными уравнениями, например,

$$\begin{aligned} z((i+1)T_0) &= Fz(iT_0) + Gx(iT_0); \\ y(iT_0) &= Cz(iT_0) + Dx(iT_0), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $T_0$  – период следования импульсов;  $F, G, C, D$  – матрицы параметров дискретной системы.

Особый подкласс по отношению к непрерывности изменения переменных во времени образуют САУ релейного действия. К ним относятся системы, содержащие звенья, в которых при непрерывном изменении входной величины для определенных ее значений выходная величина изменяется скачком. Статические характеристики таких звеньев, называемых релейными, имеют точки разрыва (рис. 1.6). Следует заметить, что релейные системы всегда нелинейные. Наряду с непрерывными и дискретными системами иногда в отдельные классы выделяют непрерывно-дискретные САУ и системы с цифровой обработкой сигналов. К этим классам относятся большинство современных САУ, использующих микропроцессорную технику.

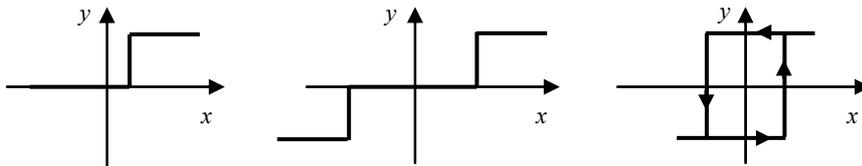


Рис. 1.6. Примеры статических характеристик релейных звеньев

САУ (линейные, нелинейные, непрерывные, дискретные) называются *стационарными*, если их динамические режимы описываются уравнениями с постоянными коэффициентами. Например, системы, представленные моделями (1.1) – (1.4), относятся к стационарным, в них матрицы параметров  $A, B$  и другие не зависят от времени.

Если коэффициенты уравнений динамики являются переменными (зависят от времени), то САУ называются *нестационарными*. Например, для нестационарной линейной непрерывной системы модель динамики, аналогичная (1.1), записывается в виде

$$\dot{z} = A(t)z(t) + B(t)x(t), \quad y(t) = C(t)z(t) + D(t)x(t). \quad (1.5)$$

Все рассмотренные САУ с моделями (1.1) – (1.5) являются системами с сосредоточенными параметрами, т.е. их динамические режимы описываются обыкновенными дифференциальными или разностными уравнениями.

Если изменение переменных системы или объекта управления описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, то такие системы называются системами с распределенными параметрами. Например, широко используемое при описании тепловых процессов стационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\lambda_\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \lambda_\beta \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} + \lambda_\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} + Q = 0, \quad (1.6)$$

где  $T$  – температура (непрерывная функция координат);  $Q$  – источник теплоты внутри рассматриваемого тела;  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma$  – коэффициенты теплопроводности по соответствующим направлениям;  $\alpha, \beta, \gamma$  – пространственные координаты. В радиотехнике распространенными объектами с распределенными параметрами являются длинные линии и волноводы.

Важным для проектирования САУ с учетом условий реальной эксплуатации является выделение классов систем на множестве состояний функционирования (МСФ) [5]. Для учета возможных состояний работоспособности частей системы, изменения режимов работы и других факторов, которые приводят к изменению параметров системы, цели управления, выполняемых функций и т.п., вводится переменная состояния функционирования  $h$ . Например, различными значениями  $h$  могут быть:  $h_0$  – работа РЛС в нормальных условиях;  $h_n$  – работа РЛС в условиях помех;  $h_{тр}$  – работа РЛС при слежении за групповой целью и т.д. Изменение  $h$  может приводить к изменениям модели динамики системы (ее вида и параметров), алгоритма работы управляющего устройства и т.д. В зависимости от характера изменения переменной  $h$  и возможности идентификации ее значений на временном интервале управления  $[t_0, t_k]$  можно выделить четыре основных класса систем управления на множестве состояний функционирования  $H$ .

САУ принадлежит: к первому классу на множестве  $H$ , если при реальной эксплуатации системы значение переменной  $h$  к моменту времени  $t_0$  известно и сохраняется постоянным на временном интервале  $[t_0, t_k]$ ; ко второму классу, если значение переменной  $h$  на интервале  $[t_0, t_k]$  постоянно, но неизвестно; к третьему классу, если значение  $h$  на интервале  $[t_0, t_k]$  может изменяться, при этом в каждый момент времени  $t \in [t_0, t_k]$  известно, и к четвертому классу, если переменная  $h$  на интервале  $[t_0, t_k]$  может изменяться, при этом информация об изменении  $h$  либо отсутствует, либо не может быть учтена управляющим устройством.

Существует большое число других признаков классификации, используемых в теории автоматического управления. Например, по числу контуров в структурной схеме САУ различают одноконтурные и многоконтурные системы управления. По целевому назначению выделяют САУ наведения, самонаведения и т.д., по сложности – простые и сложные. В последнее время интенсивно развивается теория нечетких, адаптивных, робастных, цифровых и интеллектуальных систем управления.

Приведенные сведения по классификации САУ необходимы для определения "местоположения" исследуемой системы среди множества самых различных САУ и выбора соответствующих методов решения задач анализа и синтеза.

#### Вопросы для контроля

1. Помехи и шумы в АС являются входными или выходными сигналами?
2. Какие три принципа используются при управлении объектами?
3. Перечислите основные структурные элементы систем автоматического управления?
4. В чем особенность автоматических устройств систем радиосвязи в общем классе автоматических систем?
5. Какие функциональные элементы используются в устройствах АПЧ, АРУ?
6. Приведите примеры входных и выходных сигналов в САУ?
7. Приведите примеры систем автоматической стабилизации.
8. Приведите примеры следящих автоматических систем.
9. Приведите примеры автоматических систем со многими входами и многими выходами.
10. Определите, к каким классам относится РЛС.

## 2. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Класс линейных САУ составляет основу и наиболее полно исследован в классической теории автоматического управления. Важнейшим свойством линейных систем является то, что для них справедлив *принцип суперпозиции* или наложения, который заключается в следующем: реакция системы на сумму входных воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий в отдельности. В линейных непрерывных САУ входные и выходные сигналы являются непрерывными функциями времени.

Во многих случаях исследуемые САУ рассматриваются как линейные, это обусловлено рядом причин. Во-первых, математический аппарат, используемый для анализа и синтеза линейных систем значительно проще, чем для нелинейных. Во-вторых, многие нелинейные системы могут быть с помощью методов линеаризации представлены как линейные

в некотором ограниченном интервале изменения переменных. В-третьих, класс линейных систем исключительно широк и охватывает системы с переменными параметрами, системы с распределенными параметрами, системы с запаздыванием, импульсные и цифровые системы, системы, подверженные воздействию помех, и др. В табл. 2.1 приведено деление линейных систем на подклассы по различным признакам.

## 2.1. Виды линейных САУ

Признаки деления	Наименование систем
1. Характер изменения переменных во времени	1.1. Непрерывные 1.2. Дискретные (импульсные, цифровые) 1.3. Непрерывно-дискретные
2. Постоянство параметров во времени	2.1. Стационарные 2.2. Нестационарные
3. Распределенность параметров в пространстве	3.1. С сосредоточенными параметрами 3.1. С распределенными параметрами
4. Определенность параметров и сигналов	4.1. Детерминированные 4.2. Стохастические 4.3. Со случайными воздействиями (сигналами)

### 2.1. СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

При анализе линейных систем различают переходные и установившиеся процессы. Свойства систем и их элементов (звеньев) для этих процессов определяются динамическими и статическими характеристиками.

#### 2.1.1. Статические характеристики

В общем случае *статическая характеристика* (СХ) для системы с сосредоточенными параметрами с одним входом и одним выходом представляет собой зависимость выходной переменной  $y$  от значения входной переменной  $x$  в установившемся режиме и записывается в форме алгебраического уравнения

$$y = f(x); \quad x \in X, \quad (2.1)$$

где  $X$  – область значений  $x$ .

Уравнение (2.1) называют уравнением статики. Для объектов с  $m$  входами статическая характеристика записывается в виде функции  $y$  от нескольких входных переменных, т.е.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

В случае линейной системы с одним входом и одним выходом СХ (2.1) записывается как уравнение прямой линии

$$y = K_0 + Kx \quad \text{или} \quad y = Kx;$$

здесь  $K_0, K$  – постоянные коэффициенты, коэффициент  $K$  называют передаточным коэффициентом или коэффициентом усиления.

Для линейной системы с  $m$  входами статическая характеристика имеет вид

$$y = K_0 + K_1x_1 + \dots + K_mx_m,$$

а для многомерной системы с  $m$  входами и  $m$  выходами СХ записывается как система линейных уравнений:

$$y_1 = K_{10} + K_{11}x_1 + \dots + K_{1m}x_m;$$

...

$$y_m = K_{m0} + K_{m1}x_1 + \dots + K_{mm}x_m.$$

Для объектов с распределенными параметрами статическая характеристика записывается в форме дифференциальных уравнений в частных производных, например, вида (1.6).

Звенья САУ, имеющие СХ, называют *статическими звеньями*, а объекты управления – *объектами с самовыравниванием*. Знание статической характеристики объекта управления необходимо для выбора режимов работы, определения области, в пределах которой объект можно считать линейным, расчета функций чувствительности к изменению входных переменных и т.д.

Для системы, состоящей из  $n$  последовательно соединенных линейных звеньев со статическими характеристиками

$$y_i = K_i x_i, \quad i = \overline{1, n},$$

когда выход одного звена является входом другого ( $y_i = x_{i+1}$ ), СХ всей системы со входом  $x = x_1$  и выходом  $y = y_n$  имеет аналогичный вид, т.е.

$$y = Kx,$$

при этом передаточный коэффициент  $K$  системы равен произведению передаточных коэффициентов звеньев, т.е.

$$K = \prod_{i=1}^n K_i.$$

Передаточный коэффициент системы при параллельном соединении звеньев, когда

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x \text{ и } y = \sum_{i=1}^n y_i$$

равен сумме значений  $K_i$ , т.е.  $K = \sum_{i=1}^n K_i$ .

В случае соединения звеньев по схеме отрицательной обратной связи (рис. 1.1, в), когда

$$u = K_{yy}e, \quad y = K_0u, \quad e = y_{\text{зад}} - y,$$

статическая характеристика замкнутой САУ имеет вид

$$y = \frac{K_{yy}K_0}{1 + K_{yy}K_0} y_{\text{зад}},$$

где  $K_{yy}, K_0$  – передаточные коэффициенты управляющего устройства и объекта, соответственно.

Следует заметить, что при описании статической характеристики звена важно указать диапазон значений изменения  $x$ , при котором зависимость выхода  $y$  от  $x$  можно считать линейной, а для статической характеристики САУ следует указать диапазоны линейности, входящих в ее состав звеньев.

Некоторые звенья (системы, объекты) не имеют СХ. Например, если у электродвигателя в качестве выходной величины  $y$  рассматривать угол поворота якоря, а в качестве входной  $x$  – подводимое напряжение, то при  $x \neq 0$  установившегося значения  $y$  не наступает. Такие звенья называют *астатическими звеньями*, а объекты – *объектами без самовыравнивания*.

В астатических звеньях может существовать однозначная зависимость производной выходной величины  $dy/dt$  от постоянного значения входной. Для некоторых звеньев постоянной в установившемся режиме является вторая, третья или более высокого порядка производная  $y$ . В этих случаях говорят, что звено обладает *астатизмом* соответствующего порядка, т.е. первого, второго, третьего и т.д.

Понятия статизма и астатизма применительно к системам автоматического управления, в частности регулирования, имеют следующий смысл. Если при любом постоянном значении задающего воздействия  $y_{\text{зад}}$  установившаяся ошибка  $y_{\text{зад}} - y(t = \infty)$  не равна нулю, то САУ называют статической по отношению к задающему воздействию.

Если при любом постоянном значении  $y_{\text{зад}}$  установившаяся ошибка равна нулю, то САУ называется астатической с астатизмом соответствующего порядка. Для астатической САУ первого порядка ошибка  $y_{\text{зад}} - y(t = \infty)$  равна нулю при  $y_{\text{зад}} = \text{const}$  и имеется установившаяся ошибка при изменении  $y_{\text{зад}}$  с постоянной скоростью. Астатическая САУ второго порядка имеет установившуюся ошибку при изменении  $y_{\text{зад}}$  с постоянным ускорением, а задающие воздействия  $y_{\text{зад}} = \text{const}$  и  $dy_{\text{зад}}/dt = \text{const}$  обрабатывает без установившейся ошибки. Аналогично даются определения статической и астатической САУ по отношению к возмущающему воздействию.

### 2.1.2. Динамические характеристики

Свойства объекта, САУ и отдельных ее звеньев в переходных процессах (динамических режимах) определяются с помощью *динамических характеристик* (ДХ). В зависимости от свойств системы и решаемых задач анализа и синтеза для описания переходных процессов в САУ используются дифференциальные уравнения, передаточные функции, частотные и временные характеристики.

В табл. 2.2 приведены основные задачи, решаемые с использованием различных ДХ применительно к непрерывным САУ. Дифференциальные уравнения (ДУ) наиболее часто используются в качестве моделей динамических режимов как объектов управления, так и САУ. По известному ДУ можно получить любые другие ДХ системы. Так, для определения временных характеристик необходимо решить ДУ при соответствующем входном сигнале, передаточная функция находится с использованием преобразования Лапласа, а амплитудно-фазовая частотная характеристика – преобразования Фурье. Обычно ДХ составляет основу математической модели исследуемой системы.

## 2.2. Области применения различных динамических характеристик

Динамические характеристики	Свойства системы	Область использования
Дифференциальные уравнения	Линейные и нелинейные	Анализ устойчивости, оптимальное управление, моделирование, построение модели на основе физических законов
Передаточные функции Частотные	Линейные Линейные и нелинейные	Синтез САУ, анализ устойчивости Анализ устойчивости, идентификация модели
Временные	Линейные и нелинейные	Идентификация модели, оценка качества управления

## 2.3. Связи между динамическими характеристиками

Известные ДХ	Получаемые ДХ				
	ДУ	$W(p)$	$W(j\omega)$	$h(t)$	$W(t)$
ДУ		$\mathcal{L},$ $\left(\frac{d}{dt} \rightarrow p\right)$	$\mathcal{F},$ $\left(\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega\right)$	Решение ДУ при $x(t)=1(t)$	Решение ДУ при $x(t)=\delta(t)$
$W(p)$	$\mathcal{L}^{-1}[W(p)]$		замена $p \rightarrow j\omega$	$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}W(p)\right]$	$\mathcal{L}^{-1}[W(p)]$
$W(j\omega)$	$\mathcal{F}^{-1}[W(j\omega)]$	замена $j\omega \rightarrow p$		$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}W(j\omega)\right]$	$\mathcal{F}^{-1}[W(j\omega)]$
$h(t)$	Идентификация	$\mathcal{L}[h'(t)]$	$\mathcal{F}[h'(t)]$		$\frac{dh(t)}{dt}$
$W(t)$	Идентификация	$\mathcal{L}[W(t)]$	$\mathcal{F}[W(t)]$	$\int_0^t W(\tau) d\tau$	

В табл. 2.3 приведены способы получения различных динамических характеристик по известным другим ДХ. Динамические характеристики САУ по известным ДХ входящих в ее состав частей обычно получают с использованием *передаточных функций* (ПФ). Это объясняется тем, что по известной структурной схеме САУ и передаточным функциям ее звеньев с использованием простых алгебраических операций легко получить ПФ всей системы.

*Передаточной функцией* системы (или звена)  $W(p)$  с входом  $x(t)$  и выходом  $y(t)$  называется отношение преобразования Лапласа выхода  $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$  к преобразованию Лапласа входа  $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$  (при нулевых начальных условиях), т.е.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}, \quad (2.2)$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа.

В табл. 2.4 приведены наиболее употребительные оригиналы сигналов  $f(t)$  и соответствующих изображений по Лапласу  $F(p)$ , т.е.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt;$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (2.3)$$

а в табл. 2.5 – теоремы и правила.

Передаточная функция системы  $W_c(p)$  находится по передаточным функциям  $W_i(p)$  ее элементарных звеньев с использованием следующих формул:

- последовательное соединение  $n$  звеньев, когда выходная величина предыдущего звена является входной для последующего (рис. 2.1, а)

$$W_c(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p); \quad (2.4)$$

- параллельное соединение  $n$  звеньев (здесь входная величина одновременно подается на входы всех звеньев, а выходная равна сумме выходных величин отдельных звеньев (рис. 2.1, б)

$$W_c(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p); \quad (2.5)$$

- соединение с отрицательной обратной связью (частный случай встречно-параллельного соединения звеньев  $W_1(p)$  и  $W_{oc}(p)$ ), когда на вход соединения одновременно с входной величиной  $x$  системы, подается ее выходная величина  $y$ , прошедшая через звено обратной связи с передаточной функцией  $W_{oc}(p)$ , (рис. 2.1, в)

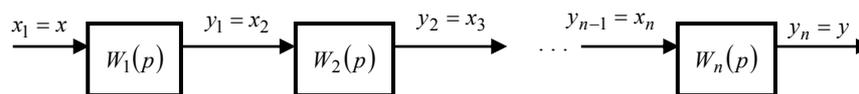
$$W_c(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_{oc}(p)}; \quad (2.6)$$

- соединение с положительной обратной связью (другой частный случай встречно-параллельного соединения (рис. 2.1, з))

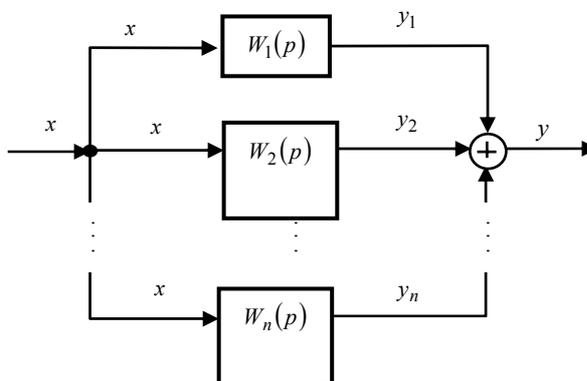
$$W_c(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_{oc}(p)}. \quad (2.7)$$

#### 2.4. Изображения по Лапласу функций $f(t)$

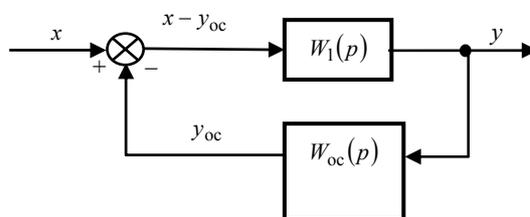
Наименование	$f(t)$	$F(p)$
Единичная ступенчатая функция	$1(t)$	$1/p$
Единичная импульсная функция	$\delta(t)$	1
Степенная функция	$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Экспонента	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p+a}$
Смещенная экспонента	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at}) \cdot 1(t)$ $(1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p(p+a)}$ $\frac{1}{p(Tp+1)}$
Синусоида	$\sin \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$
Затухающая синусоида	$e^{-\gamma t} \sin \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{\lambda}{(p^2 + \gamma^2) + \lambda^2}$
Косинусоида	$\cos \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{p}{p^2 + \lambda^2}$
Затухающая косинусоида	$e^{-\gamma t} \cos \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{p + \gamma}{(p^2 + \gamma^2) + \lambda^2}$



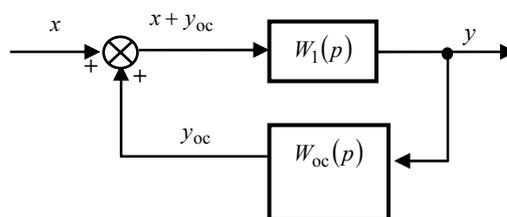
a)



б)



в)



з)

Рис. 2.1. Соединения звеньев: последовательное (а), параллельное (б), встречно-параллельное с отрицательной обратной связью (в) и с положительной обратной связью (з)

### 2.5. Свойства (теоремы) преобразования Лапласа

Наименование	$f(t)$	$F(p)$
Свойство линейности	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$
Теорема запаздывания	$f(t - \tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$
Теорема подобия	$f(at)$	$\frac{1}{a} F(p/a)$
Правило дифференцирования при нулевых начальных условиях	$\frac{df(t)}{dt} \quad \frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$pF(p) \quad p^n F(p)$
Правило интегрирования при нулевых начальных условиях	$\int f(t) dt$	$\frac{1}{p} F(p) \quad \frac{1}{p^n} F(p)$
Дифференцирование функции $F(p)$	$tf(t)$	$-\frac{dF(p)}{dp}$
Теорема о конечном значении	$f(t \rightarrow \infty)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$

Теорема о начальном значении	$f(t=0)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$
Теорема смещения в комплексной плоскости	$e^{-\lambda t} f(t)$	$F(p + \lambda)$
Свертка	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(p) F_2(p)$

При решении задач анализа и синтеза автоматических радиоэлектронных устройств широко используются частотные характеристики – амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ), амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) и фазо-частотная характеристика (ФЧХ). Это объясняется тем, что многие сигналы в радиосистемах представляют в виде суммы гармонических сигналов, возможностью экспериментального определения частотных характеристик и удобством их использования при рассмотрении структурных схем САУ, исследовании устойчивости и других свойств системы.

АФЧХ или комплексная частотная характеристика  $W(j\omega)$  определяется как отношение преобразования Фурье  $\mathcal{F}$  выхода системы

$$Y(j\omega) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt$$

к преобразованию Фурье входа

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

т.е.

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}; \quad (2.8)$$

здесь  $\omega$  – угловая частота;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $y(t), x(t)$  – односторонние функции, т.е.  $y(t) = 0, x(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Сигналы на входе и выходе можно записать в виде

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\varphi_x(\omega)} \text{ и } Y(j\omega) = |Y(j\omega)| e^{j\varphi_y(\omega)}.$$

Тогда

$$W(j\omega) = \frac{|Y(j\omega)| e^{j\varphi_y(\omega)}}{|X(j\omega)| e^{j\varphi_x(\omega)}} = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.9)$$

где

$$M(\omega) = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} = \frac{M_y(\omega)}{M_x(\omega)} = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega) = \arctg \left[ \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right]. \quad (2.10)$$

Здесь  $M(\omega)$  есть АЧХ,  $\varphi(\omega)$  – ФЧХ,  $P(\omega)$  – действительная (вещественная) частотная характеристика;  $Q(\omega)$  – мнимая частотная характеристика.

Таким образом, АЧХ есть зависимость отношения амплитуд выходных  $y(t) = M_y \sin(\omega t + \varphi_y)$  и входных  $x(t) = M_x \sin(\omega t + \varphi_x)$  колебаний от частоты, а ФЧХ представляет собой зависимость разности фаз выходных и входных колебаний от частоты.

Если известна передаточная функция  $W(p)$ , то АФЧХ  $W(j\omega)$  получается заменой аргумента  $p$  (в общем случае комплексной величины) на  $j\omega$ . При этом сохраняются основные свойства, приведенные в табл. 2.5, т.е.

- линейности

$$\mathcal{F} \left[ \sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \right] = \left[ \sum_{i=1}^n a_i F_i(j\omega) \right];$$

- дифференцирования

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(j\omega), \quad \mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(j\omega);$$

- интегрирования

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta(\omega);$$

- задержки

$$\mathcal{F}[f(t-\tau)] = e^{-j\omega\tau} F(j\omega);$$

- свертки

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] = F_1(j\omega) F_2(j\omega).$$

Широкое распространение на практике получили *логарифмические частотные характеристики* – амплитудные (ЛАЧХ) и фазовые (ЛФЧХ). Достоинством логарифмических характеристик при исследовании линейных стационарных систем является возможность по виду этих характеристик восстановить структурную схему системы и определить параметры элементарных динамических звеньев, входящих в систему. Полученные результаты можно использовать для определения передаточной функции и затем дифференциального уравнения.

Для получения ЛАЧХ и ЛФЧХ исходную АФЧХ  $W(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$  логарифмируют

$$\ln W(j\omega) = \ln M(\omega) + j\varphi(\omega),$$

или

$$\lg W(j\omega) = \lg M(\omega) + j\varphi(\omega) \lg e.$$

Обычно в качестве ЛАЧХ используется функция  $L(\omega) = 20 \lg M(\omega)$ , измеряемая в децибелах. Здесь предполагается, что в качестве входов  $x$  и выходов  $y$  рассматриваются напряжения или токи в электрических цепях. Если в качестве  $x, y$  используются мощности, то  $L(\omega) = 10 \lg M(\omega)$ . При построении ЛАЧХ и ЛФЧХ по оси абсцисс откладывают угловые частоты в логарифмическом масштабе.

Временные характеристики системы представляют собой реакции системы на стандартные входные воздействия:

- единичная ступенчатая функция

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0; \\ 1 & \text{при } t > 0; \end{cases}$$

- дельта-функция или единичная импульсная функция

$$x(t) = 1'(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad \text{причем } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;$$

- прямоугольный импульс

$$x(t) = N(1(t) - 1(t-\tau)) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0; \\ N & \text{при } t \in (0; \tau]; \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

*Переходная функция* (характеристика)  $h(t)$  представляет собой процесс изменения  $y(t)$  на выходе звена (системы) при подаче на вход  $x(t) = 1(t)$ . Если на вход подается произвольная ступенчатая функция, т.е.  $x(t) = N \cdot 1(t)$ , то на выходе будет  $y(t) = Nh(t)$ . Реакцию объекта на ступенчатую функцию часто называют *кривой разгона*.

*Функция веса* (импульсная переходная функция)  $W(t)$  представляет собой реакцию системы на дельта-функцию. Она удовлетворяет двум следующим условиям:

1) условию физической осуществимости (причинности)  $W(t) = 0, t < 0$ , т.е. переходный процесс  $W(t)$  не может возникнуть раньше подачи на вход сигнала  $\delta(t)$  при  $t = 0$ ;

2) условию, определяющему устойчивость системы  $\int_0^{\infty} |W(t)| dt < \infty$ .

Нетрудно показать, что  $W(t) = \frac{dh(t)}{dt}$ .

Рассматривая различные виды ДХ следует отметить, что важно знать, во-первых, при решении каких задач следует использовать соответствующую характеристику, и, во-вторых, как получить необходимую ДХ по известной другой. Наиболее часто при решении задач анализа и синтеза САУ и особенно при решении задач оптимального управления применяется описание динамики в виде дифференциального уравнения. Задачи структурного синтеза, когда по ДХ элементарных звеньев требуется получить ДХ системы, решаются с использованием передаточных функций и частотных характеристик. Для обеспечения требуемых свойств САУ на основе введения корректирующих звеньев обычно используются логарифмические частотные характеристики. При определении ДХ по экспериментальным данным предпочтение отдается временным и частотным характеристикам.

## 2.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

В структурном анализе и синтезе САУ широко используются  *типовые*  (элементарные, простейшие)  *динамические*  звенья (ТДЗ). Простейшее звено имеет один вход  $x$  и один выход  $y$ . Знание характеристик звеньев, из которых состоит система, позволяет получить характеристики и исследовать свойства всей системы.

Обычно выделяют три группы ТДЗ: позиционные (безынерционное, аperiodические первого и второго порядков, колебательное), интегрирующие (идеальное интегрирующее, инерционное интегрирующее изодромное) и дифференцирующие (идеальное дифференцирующее, инерционное дифференцирующее и форсирующее) [1]. Динамика этих звеньев описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка, в частности

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y(t) = b_0\dot{x} + b_1x(t);$$

здесь

$$\ddot{y} = d^2y(t)dt^2, \quad \dot{y} = dy(t)dt, \quad \dot{x} = dx(t)dt.$$

Этому уравнению соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0p + b_1}{a_0p^2 + a_1p + a_2}, \quad p = c + j\omega.$$

При обращении в нуль одного или нескольких коэффициентов  $a_i, b_i$  (или их звена) меняется тип звена и его свойства. Если два устройства различной природы – механическое, электрическое или др. – имеют одинаковый вид дифференциального уравнения, а следовательно, передаточной функции или других ДХ, то эти устройства характеризуются одинаковыми свойствами в смысле изменения  $y(t)$  в зависимости от  $x(t)$ . Наряду с выделенными тремя группами ТДЗ, к типовым относится также звено чистого запаздывания.

### 2.2.1. Аperiodическое звено первого порядка

*Аperiodическим (инерционным)*   *звеном первого порядка*  называется звено, переходный режим которого описывается дифференциальным уравнением

$$T\dot{y} + y(t) = Kx(t) \tag{2.11}$$

или в нормальной форме

$$\dot{y} = ay(t) + bx(t). \tag{2.12}$$

Параметр  $K$  называется коэффициентом усиления, а  $T$  – постоянной времени, которая определяет инерционные свойства объекта. Связь между параметрами  $K, T$  и  $a, b$  в (2.11), (2.12) определяется равенствами

$$T = -\frac{1}{a}; \quad K = -\frac{b}{a}. \tag{2.13}$$

Если при  $t \rightarrow \infty$   $dy/dt \rightarrow 0$ , то из уравнения (2.11) видно, что статическая характеристика звена представляет собой уравнение прямой линии

$$y = Kx.$$

Переходный процесс при подаче на вход звена произвольного сигнала  $x(t), t > t_0$  определяется уравнением

$$y(t) = e^{a(t-t_0)} y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} bx(s) ds \tag{2.14}$$

или

$$y(t) = e^{\frac{1}{T}(t-t_0)} y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{T}(t-s)} \frac{K}{T} x(s) ds. \tag{2.15}$$

Используя формулы (2.14), (2.15), легко получать временные характеристики звена. Полагая  $t_0 = 0, y(t_0) = 0$  и  $x(t) = 1(t)$ , получаем выражение для переходной функции

$$h(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-s)} \frac{K}{T} 1(s) ds = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t) \quad (2.16)$$

или  $h(t) = -\frac{b}{a} (1 - e^{at}) \cdot 1(t)$ .

Если в формулу (2.15) подставить  $x(t) = \delta(t)$  или продифференцировать  $h(t)$ , то находим функцию веса или импульсную переходную функцию, т.е.

$$W(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t) \quad (2.17)$$

или  $W(t) = be^{at} \cdot 1(t)$ .

Графическое представление  $h(t)$  и  $W(t)$  показано на рис. 2.2. Из рис. 2.2, а виден геометрический смысл параметров  $K$  и  $T$ . Параметр  $K$  соответствует отрезку по оси  $y$  между двумя установившимися значениями, а постоянная времени  $T$  равна проекции отрезка касательной к кривой  $h(t)$ .

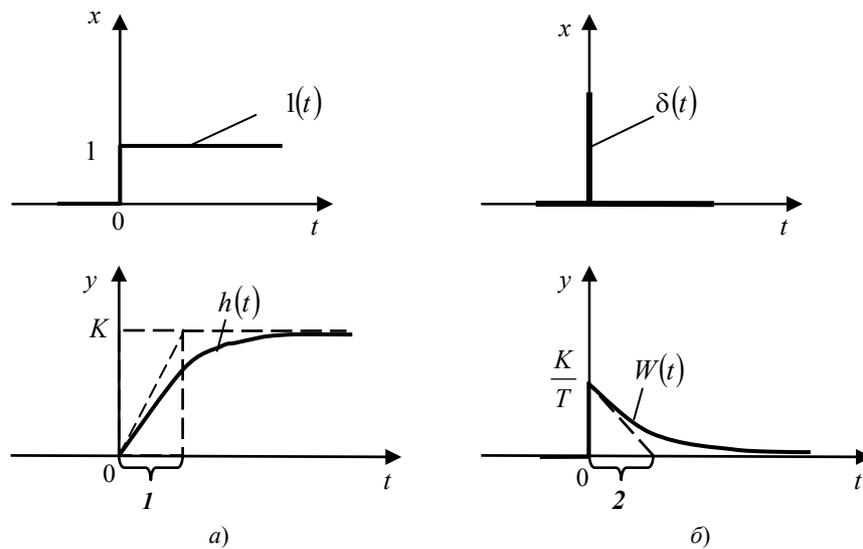


Рис. 2.2. Временные характеристики аperiodического звена  $h(t)$  (а) и  $W(t)$  (б)

Из уравнения (2.11) легко получить передаточную функцию звена с помощью преобразования Лапласа. Так как

$$\mathcal{L} \left[ T \frac{d y(t)}{dt} \right] = T p Y(p), \quad \mathcal{L} [K x(t)] = K X(p),$$

то, используя свойство суммирования (табл. 2.3), получаем

$$T p Y(p) + Y(p) = K X(p);$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{T p + 1}; \quad (2.18)$$

$$W(p) = \frac{-b/a}{-\frac{1}{a} p + 1} = \frac{b}{p - a}.$$

Легко убедиться, что, используя преобразование Лапласа для экспоненты, имеет место  $\mathcal{L} [W(t)] = W(p)$ ,  $\mathcal{L}^{-1} [W(p)] = W(t)$ .

Частотные характеристики звена находятся заменой в формуле (2.18)  $p$  на  $j\omega$ . В результате АФЧХ определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}. \quad (2.19)$$

Другие частотные характеристики получаются простейшими преобразованиями:

$$W(j\omega) = \frac{K(1-j\omega T)}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{K}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{K\omega T}{1+\omega^2 T^2},$$

т.е.

$$P(\omega) = \frac{K}{1+\omega^2 T^2}; \quad (2.20)$$

$$Q(\omega) = -\frac{K\omega T}{1+\omega^2 T^2}; \quad (2.21)$$

$$M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}; \quad (2.22)$$

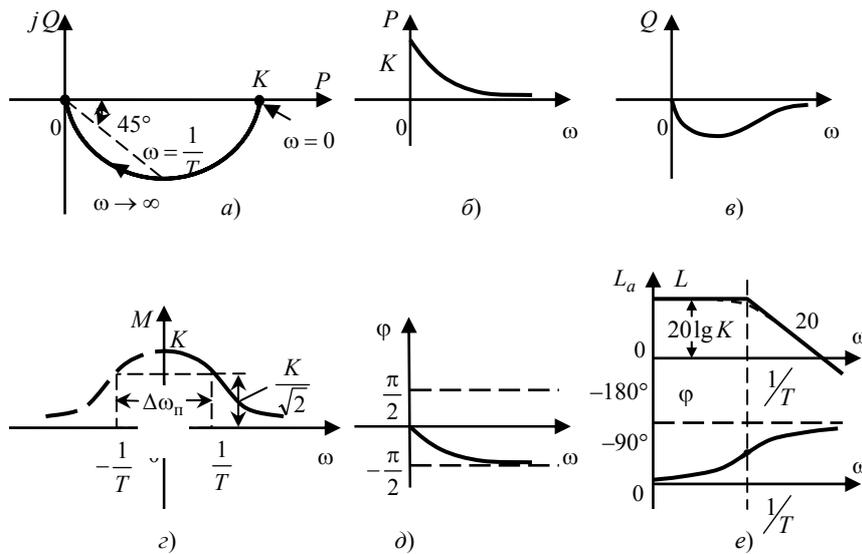
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg(\omega T). \quad (2.23)$$

Графическое представление этих частотных характеристик приведено на рис. 2.3, а – д.

Логарифмические частотные характеристики показаны на рис. 2.5, е, где пунктиром выделено точное значение ЛАЧХ, т.е.

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \quad (2.24)$$

и сплошной линией асимптотическая ЛАЧХ  $L_a(\omega)$ . Асимптотическая ЛАЧХ состоит из двух отрезков: горизонтального с  $L_a(\omega) = 20 \lg K$  при  $\omega < \frac{1}{T}$  (этот отрезок называется первой асимптотой) и отрезка с отрицательным наклоном 20 децибел на декаду при  $\omega > \frac{1}{T}$  (вторая асимптота).



**Рис. 2.3. Частотные характеристики аperiodического звена:**

а – АФЧХ; б –  $P(\omega)$ ; в –  $Q(\omega)$ ; г – АЧХ; д – ФЧХ; е – ЛАЧХ

Из рассмотрения частотных характеристик видно, что колебания низких частот  $\omega < \frac{1}{T}$  "проходят" через звено с отношением амплитуд выходного  $y$  и входного  $x$  сигналов, близким к значению коэффициента усиления (передачи)  $K$  (рис. 2.3, г). При увеличении частоты  $\left(\omega > \frac{1}{T}\right)$  происходит сильное ослабление амплитуды входного сигнала, а сигналы с высокими частотами вообще не "пропускаются" звеном. Диапазон частот  $\omega \in \left[-\frac{1}{T}; \frac{1}{T}\right]$  определяет полосу пропускания сигналов, ширина полосы пропускания определяется как  $\Delta\omega_n = 2/T$ . Таким образом, чем меньше постоянная времени  $T$ , тем шире полоса пропускания частот.

Таким образом, на примере аperiodического звена подробно рассмотрены вопросы получения одних динамических характеристик по известным другим. Далее для остальных ТДЗ все динамические характеристики даются в форме справочного материала.

### 2.2.2. Усилительное звено

В усилительном (пропорциональном или безынерционном) звене связь между выходом и входом определяется простейшим уравнением

$$y(t) = Kx(t), \tag{2.25}$$

где  $K$  – коэффициент пропорциональности (передачи).

В принципе усилительное звено является некоторой идеализацией реальных процессов в ограниченном диапазоне изменения  $x$  и  $y$ .

Все ДХ усилительного звена автоматически получаются из характеристик аperiodического звена, если принять  $T = 0$ . Эти характеристики (рис. 2.4) имеют вид:

- передаточная функция

$$W(p) = K; \tag{2.26}$$

- переходная функция

$$h(t) = K \cdot 1(t); \tag{2.27}$$

- функция веса

$$W(t) = K\delta(t); \tag{2.28}$$

- АФЧХ

$$W(j\omega) = K \text{ и } P(\omega) = K, Q(\omega) = 0; \tag{2.29}$$

- АЧХ

$$M(\omega) = K; \tag{2.30}$$

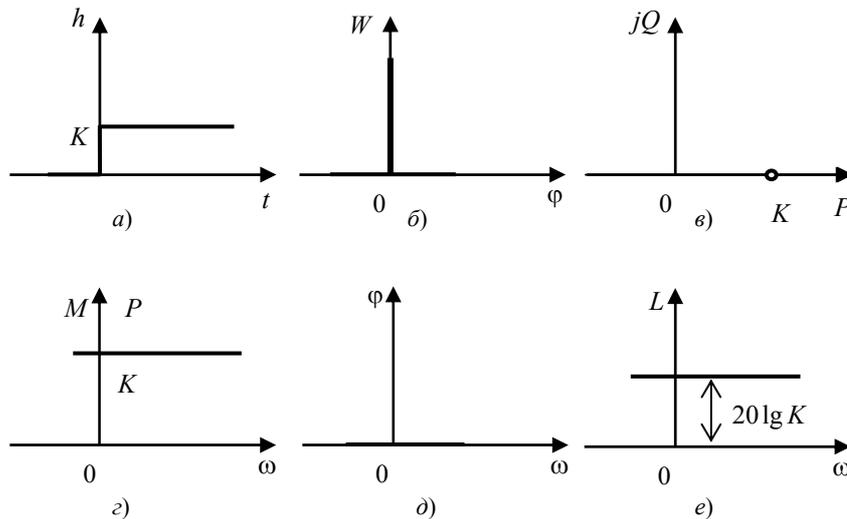
- ФЧХ

$$\varphi(\omega) = 0; \tag{2.31}$$

- ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg K. \tag{2.32}$$

В устройствах автоматики примерами усилительного звена являются усилители, делители напряжения, датчики сигналов, механические редукторы и др.



**Рис. 2.4.** Динамические характеристики усилительного звена:  
*a* – переходная функция; *б* – весовая функция; *в* – АФЧХ;  
*г* –  $P(\omega)$  и АЧХ; *д* – ФЧХ; *е* – ЛАЧХ

### 2.2.3. Инерционное звено второго порядка

Дифференциальное уравнение для данного звена записывается в виде

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y(t) = Kx(t) \tag{2.33}$$

или в нормальной форме

$$\dot{z}_1 = z_1(t);$$

$$\dot{z}_2 = a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t) + bx(t), \quad (2.34)$$

где  $z_1 = y$ ;  $z_2 = \dot{y}$ ;  $a_1 = -\frac{1}{T_2^2}$ ;  $a_2 = -\frac{T_1}{T_2^2}$ ;  $b = \frac{K}{T_2^2}$ .

Значения параметров звена  $T_1, T_2, K$  (соответственно  $a_1, a_2, b$ ) должны удовлетворять условию обеспечения вещественности корней характеристического уравнения  $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$ , т.е.

$$T_1^2 - 4T_2^2 > 0 \text{ или } T_1 > 2T_2. \quad (2.35)$$

Для параметров  $a_1, a_2$  это эквивалентно условию  $a_2^2 \geq 4a_1$ .

Используя операционную форму записи (2.33)  $(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)y = Kx$ , можно получить передаточную функцию звена

$$W(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} = \frac{K}{(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)}, \quad (2.36)$$

где  $T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$ ,  $T_3 > T_4$ ,  $T_1 = T_3 + T_4$ . (2.37)

Из (2.36) видно, что инерционное звено второго порядка можно рассматривать как последовательное соединение двух апериодических звеньев с постоянными времени  $T_3, T_4$ . Такое звено иногда называют двойным апериодическим.

Временные характеристики звена приведены на рис. 2.5, их аналитические выражения, получаемые с использованием обратного преобразования Лапласа, имеют вид:

$$h(t) = K \left( 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t); \quad (2.38)$$

$$W(t) = \frac{K}{T_3 - T_4} \left( e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t). \quad (2.39)$$

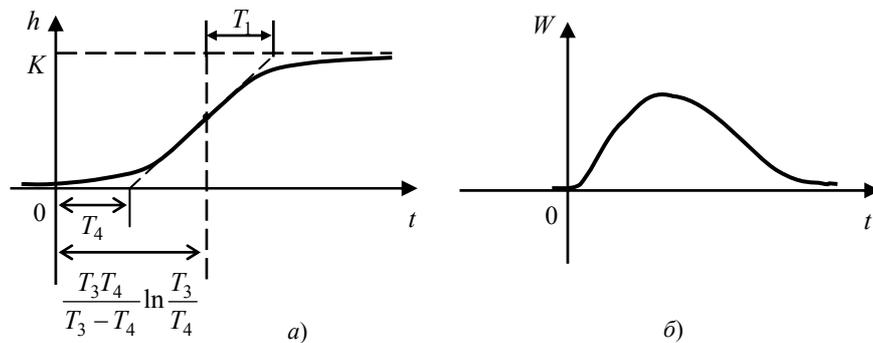


Рис. 2.5. Временные характеристики инерционного звена второго порядка:  
а –  $h(t)$ ; б –  $W(t)$

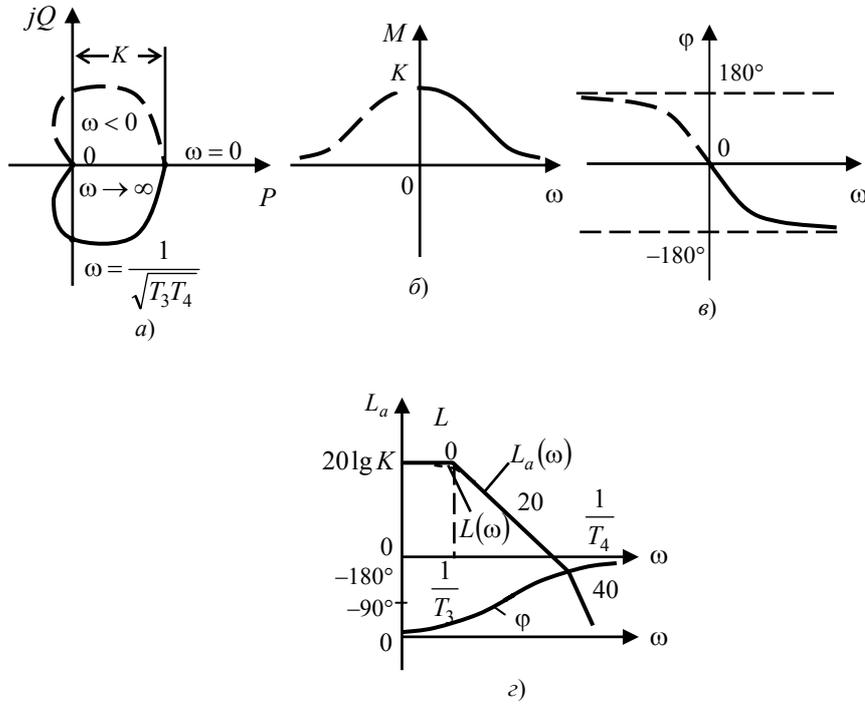


Рис. 2.6. Частотные характеристики инерционного звена второго порядка:  
 а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ; г – асимптотическая ЛАЧХ

Частотные характеристики звена записываются в виде:

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}; \quad (2.40)$$

$$P(\omega) = \frac{K(1 - \omega^2 T_3 T_4)}{1 + \omega^2(T_3^2 + T_4^2) + \omega^4 T_3^2 T_4^2}; \quad Q(\omega) = -\frac{K\omega(T_3 + T_4)}{1 + \omega^2(T_3^2 + T_4^2) + \omega^4 T_3^2 T_4^2};$$

$$M(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}; \quad (2.41)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4; \quad (2.42)$$

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}; \quad (2.43)$$

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg K, & \omega < 1/T_3; \\ \frac{K}{\omega T_3}, & \frac{1}{T_3} < \omega < \frac{1}{T_4}; \\ \frac{K}{\omega^2 T_3 T_4}, & \omega > \frac{1}{T_4}. \end{cases} \quad (2.44)$$

Здесь  $L_a(\omega)$  – асимптотическая ЛАХ, ее первая асимптота с нулевым наклоном, вторая с наклоном 20 дБ/дек и третья – 40 дБ/дек. Графическое представление частотных характеристик приведено на рис. 2.6.

Данное звено широко используется на практике для описания динамических режимов двигателей постоянного тока, фрагментов электрических схем, например, двухзвенного RC-фильтра нижних частот и др.

#### 2.2.4. Колебательное звено

Дифференциальное уравнение данного звена в нормальной форме сохраняет вид (2.24), а уравнение (2.23) обычно записывается с использованием относительного коэффициента затухания  $\zeta$ , т.е.

$$T^2 \ddot{y} + 2\zeta T \dot{y} + y(t) = Kx(t), \quad (2.45)$$

где  $T$  – постоянная времени ( $1/T$  – собственная частота  $q$ ).

Уравнению (2.45) соответствуют передаточная функция и частотные характеристики:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\zeta p + 1} = \frac{K}{\frac{p^2}{q^2} + \frac{2\zeta}{q} p + 1}; \quad (2.46)$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + 2j\omega\zeta T - \omega^2 T^2} = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{K(1 - \omega^2 T^2)}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2} + j \frac{-2KT\zeta\omega}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}; \quad (2.47)$$

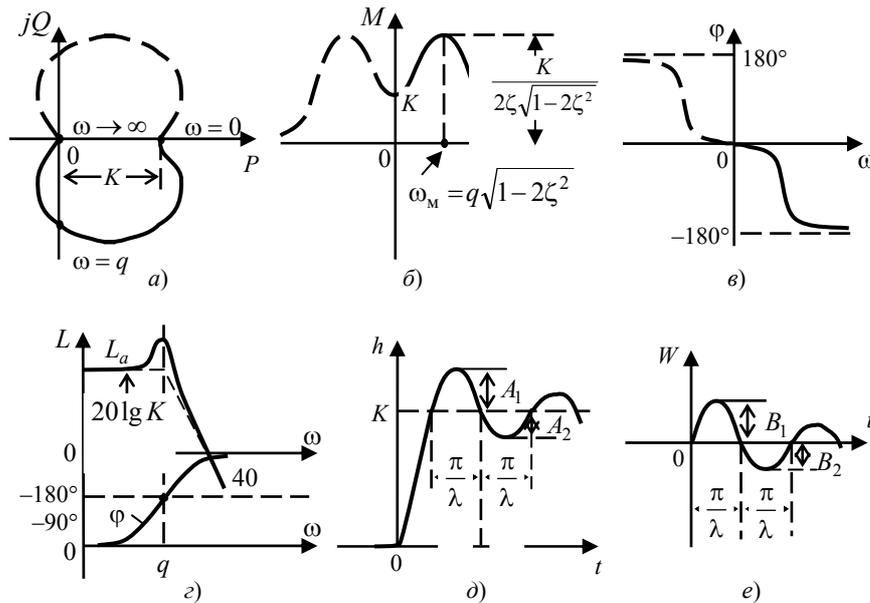
$$M(\omega) = \frac{K}{\left[ (1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2 \right]^{1/2}}; \quad (2.48)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left[ \frac{2\zeta T \omega}{1 - \omega^2 T^2} \right]; \quad (2.49)$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}; \quad (2.50)$$

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg K & \text{при } \omega < \frac{1}{T}; \\ -20 \lg \omega^2 T^2 & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (2.51)$$

Следует заметить, что вторая асимптота в формуле (2.51) пересекает ось абсцисс в точке  $\omega = \sqrt{K}/T$ . Графики частотных характеристик приведены на рис. 2.7, а – з.



**Рис. 2.7. Частотные и временные характеристики колебательного звена:**  
а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ; г – ЛАЧХ; д – переходная функция; е – функция веса

Временные характеристики звена определяются выражениями:

$$h(t) = K \left[ 1 - e^{-\gamma t} \left( \cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t \right) \right] \cdot 1(t); \quad (2.52)$$

$$W(t) = K \frac{q^2}{\lambda} e^{-\gamma_1 t} \sin \lambda t \cdot 1(t); \quad (2.53)$$

$$\gamma = \zeta q = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2}, \quad q = \frac{1}{T}, \quad \gamma_1 = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{B_1}{B_2};$$

$$\lambda = q \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad q = \sqrt{\gamma_1^2 + \lambda^2}, \quad \zeta = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma_1^2 + \lambda^2}},$$

где  $A_i, B_i$  – амплитуды колебаний, показанные на рис. 2.7,  $\delta, \epsilon, \gamma$  – коэффициент затухания переходного процесса;  $\lambda$  – частота затухающих колебаний.

При значениях  $\zeta > 1$  колебательное звено превращается в аperiodическое звено второго порядка. К колебательным звеньям относятся RLC-цепи, колебательные контуры, гироскопические элементы, упругие механические передачи. Следует заметить, что рассмотренные звенья обладают самовыравниванием и считаются устойчивыми. Свойство самовыравнивания проявляется в том, что при ступенчатом изменении входной величины они самопроизвольно приходят в новое установившееся состояние с  $y(t \rightarrow \infty) = \text{const}$ .

### 2.2.5. Консервативное звено

Данное звено представляет собой частный случай колебательного звена при относительном коэффициенте затухания  $\zeta$ , равном нулю. Это имеет место, например, если в колебательной RLC-цепи положить  $R = 0$ . Графическое представление частотных и временных характеристик показано на рис. 2.8.

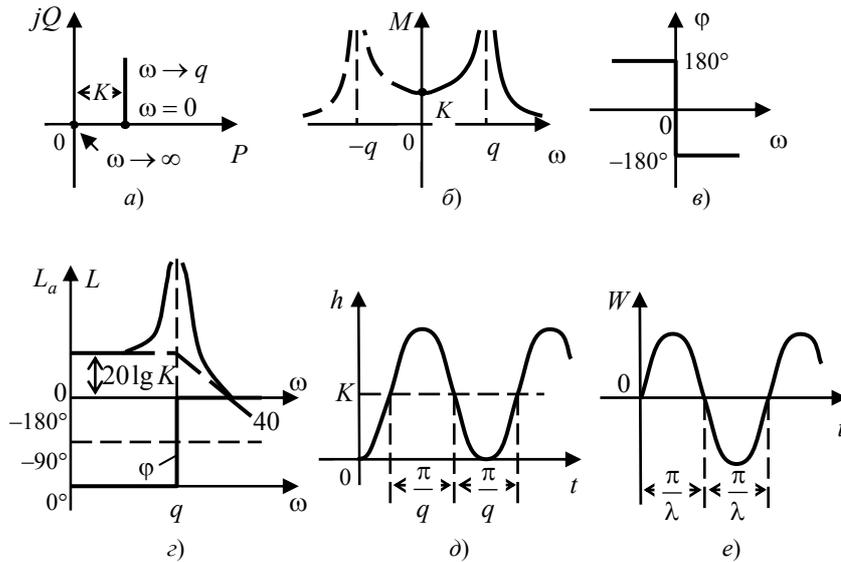
ДХ консервативного звена легко получить из характеристик колебательного, если положить  $\zeta = 0$ . В этом случае ДХ записываются в виде

$$T^2 \ddot{y} + y(t) = Kx(t); \tag{2.54}$$

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 1} = \frac{K}{1 + \frac{p^2}{q^2}}, \quad q = \frac{1}{T}; \tag{2.55}$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 - \omega^2 T^2} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{q^2}}; \tag{2.56}$$

$$P(\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{q^2}}, \quad Q(\omega) = 0, \quad M(\omega) = \frac{K}{|1 - \omega^2 T^2|}; \tag{2.57}$$



**Рис. 2.8. Частотные и временные характеристики консервативного звена:**  
 а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ; г – ЛАЧХ; д – переходная функция; е – функция веса

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -180^\circ & \text{при } \omega > 0; \\ 180^\circ & \text{при } \omega < 0; \end{cases} \tag{2.58}$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg |1 - \omega^2 T^2|; \tag{2.59}$$

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg K & \text{при } \omega < \frac{1}{T}; \\ -20 \lg \omega^2 T^2 & \text{при } \omega > \frac{1}{T}; \end{cases} \tag{2.60}$$

$$h(t) = K(1 - \cos qt) \cdot 1(t); \tag{2.61}$$

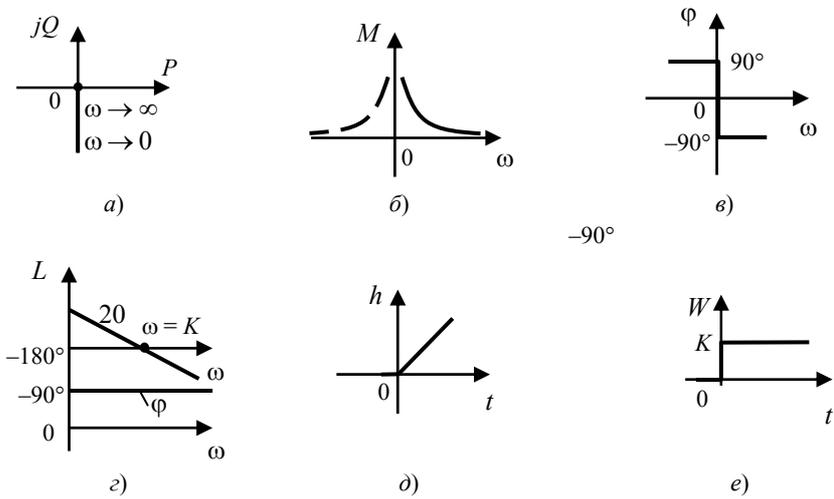
$$W(t) = Kq \sin qt \cdot 1(t). \quad (2.62)$$

### 2.2.6. Интегрирующие звенья

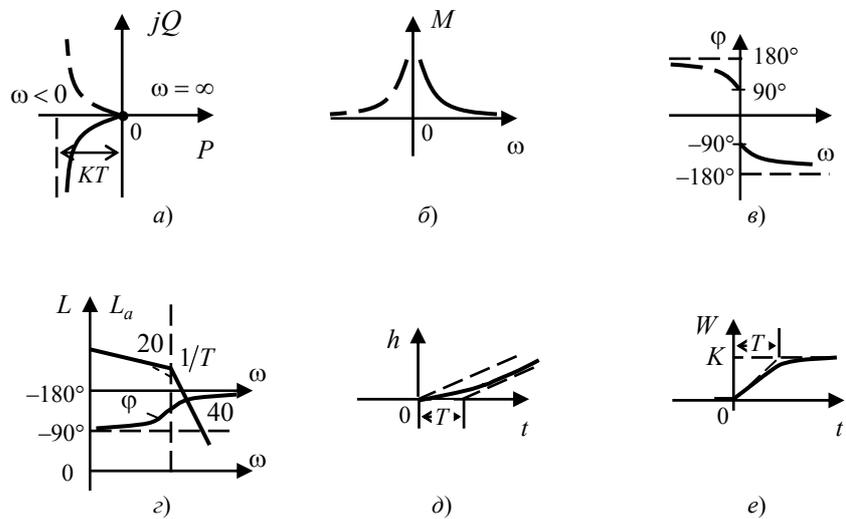
Выделяют три вида интегрирующих звеньев: идеальное, инерционное интегрирующее (с замедлением) и изодромное. ДХ этих звеньев приведены в табл. 2.6 и на рис. 2.9 – 2.11.

2.6. Динамические характеристики интегрирующих звеньев

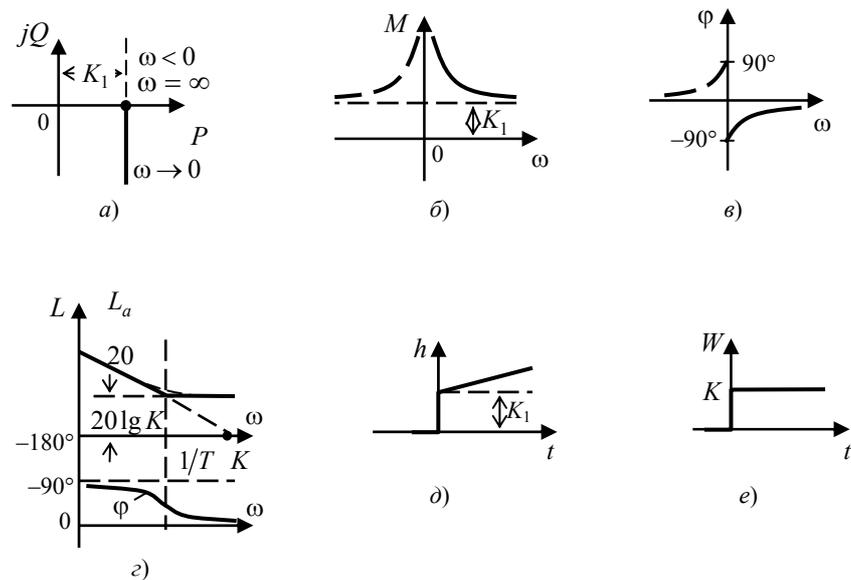
Наименование характеристик	Идеальное	Инерционное (с замедлением)	Изодромное
Дифференциальное уравнение	$\dot{y} = K x(t)$ $y(t) = K \int_0^t x(s) ds$	$T\dot{y} + y(t) = K x$	$\dot{y} = K x(t) + K_1 \dot{x}$
Передаточная функция	$W(p) = \frac{K}{p}$	$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)} =$ $= \frac{K}{p} - \frac{KT}{1+Tp}$	$W(p) = \frac{K(1+Tp)}{p} =$ $= \frac{K}{p} + K_1, \quad T = K_1/K$
АФЧХ	$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$	$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T)}$	$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} + K_1$
АЧХ	$M(\omega) = \frac{K}{\omega}$	$M(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}}$	$M(\omega) = \frac{K}{\omega}\sqrt{1+T^2\omega^2}$
ФЧХ	$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \text{ Для } \omega > 0$	$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg\omega T$	$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg\omega T$
ЛАЧХ	$L(\omega) =$ $= 20 \lg(K/\omega)$	$L(\omega) =$ $= 20 \lg \frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$	$L(\omega) =$ $= 20 \lg \frac{K\sqrt{1+\omega^2 T^2}}{\omega}$
Переходная функция	$h(t) = K t \cdot 1(t)$	$h(t) =$ $= K \left[ t - T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] \cdot 1(t)$	$h(t) = (Kt + K_1)1(t), \quad K_1 = KT$
Функция веса	$W(t) = K \cdot 1(t)$	$W(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t)$	$W(t) = K \cdot 1(t) + K_1 \delta(t)$



**Рис. 2.9. Частотные и временные характеристики идеального интегрирующего звена:**  
*a* – АФЧХ; *б* – АЧХ; *в* – ФЧХ; *г* – ЛАЧХ; *д* – переходная функция; *е* – функция веса



**Рис. 2.10. Частотные и временные характеристики инерционного интегрирующего звена:**  
*a* – АФЧХ; *б* – АЧХ; *в* – ФЧХ; *г* – ЛАЧХ; *д* – переходная функция; *е* – функция веса



**Рис. 2.11. Частотные и временные характеристики изодромного интегрирующего звена:**  
*a* – АФЧХ; *б* – АЧХ; *в* – ФЧХ; *г* – ЛАЧХ; *д* – переходная функция; *е* – функция веса

Примером идеального интегрирующего звена могут рассматриваться операционный усилитель (в режиме интегрирования), интегрирующий привод в навигационных системах, гироскоп, малоинерционный электродвигатель и др.

Инерционное интегрирующее звено или интегрирующее звено с замедлением можно рассматривать как последовательное соединение идеального интегрирующего и апериодического (первого порядка) звеньев. Такое звено также называют реальным двойным интегратором, система дифференциальных уравнений в нормальной форме для него записывается в виде

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2(t); \\ \dot{z}_2 &= az_2(t) + bx(t),\end{aligned}\tag{2.63}$$

где  $z_1 = y$ ;  $z_2 = \dot{y}$ ;  $a = -\frac{1}{T}$ ;  $b = \frac{K}{T}$ .

Реальный двойной интегратор используется для описания динамики таких объектов как серводвигатели, демпферы, интегрирующие приводы и др. Наряду с реальным двойным интегратором. Ряд объектов описываются моделью двойного интегратора, т.е.

$$\dot{z}_1 = z(t); \quad \dot{z}_2 = bx(t).\tag{2.64}$$

К таким объектам относятся некоторые двигатели постоянного тока, гидравлические емкости, движение летательных аппаратов и т.д.

Как видно из передаточной функции изодромного звена, его можно представить в виде двух параллельно соединенных звеньев – идеального интегрирующего и безынерционного (усилительного). Изодромное звено широко используется для описания динамических режимов некоторых объектов (демпфер с пружиной, операционный усилитель с обратной связью в виде RC-цепи и др.) и устройств системы автоматического регулирования (изодромный или пропорционально-интегральный регулятор). Особенностью данного звена (график ЛАЧХ рис. 2.11, з) является то, что в области малых частот  $\left(\omega < \frac{1}{T}\right)$  звено ведет себя как идеальное интегрирующее, а при больших  $\left(\omega > \frac{1}{T}\right)$  – как безынерционное.

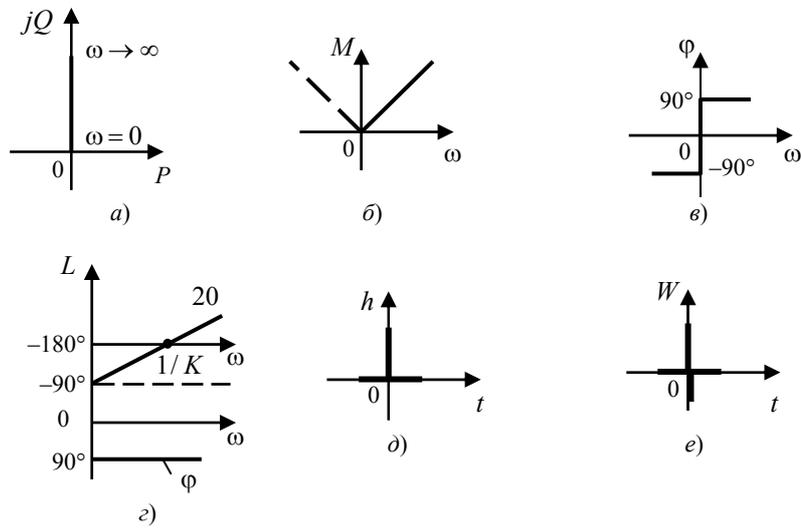
Общей особенностью интегрирующих звеньев является то, что они не обладают свойством самовыравнивания, т.е. ограниченное изменение входной величины  $x$ , например, ступенчатое, приводит к неограниченному возрастанию во времени выходной величины  $y$ . Это наглядно проявляется в графиках переходной функции (рис. 2.11, д; 2.12, д; 2.13, д).

### 2.2.7. Дифференцирующие звенья

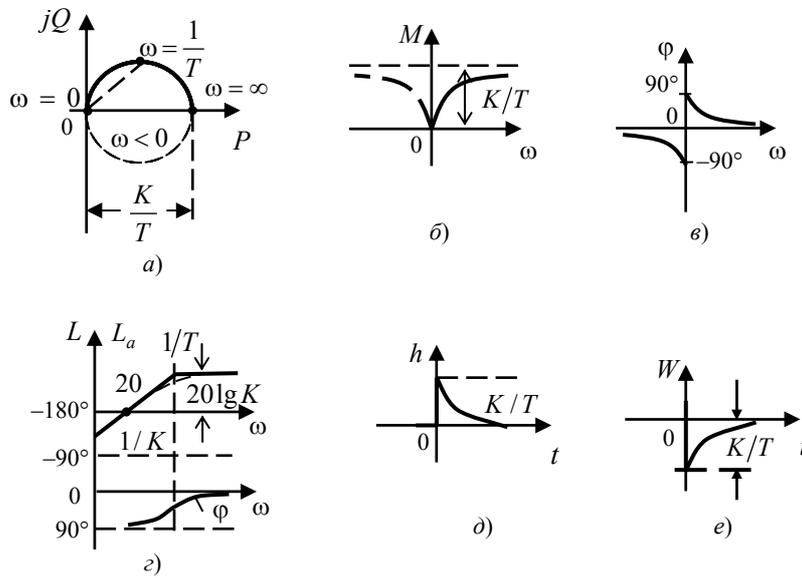
Динамические характеристики трех дифференцирующих звеньев – идеального, с замедлением и форсирующего приведены в табл. 2.7 и на рис. 2.12 – 2.14.

Примерами идеального дифференцирующего звена являются операционный усилитель в режиме дифференцирования. Дифференцирующее звено с замедлением можно представить в виде последовательного соединения идеального дифференцирующего и апериодического звеньев. Примерами такого звена служат фрагменты электрических цепей (CR-, RL-).

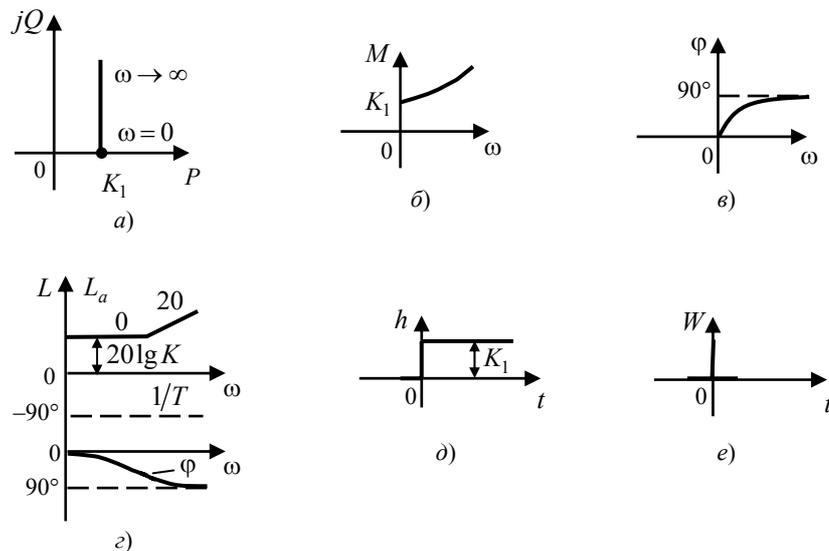
Форсирующее звено представляет собой параллельное соединение безынерционного и идеального дифференцирующих звеньев. Данное звено широко используется в составе корректирующих цепей систем автоматического управления.



**Рис. 2.12. Частотные и временные характеристики идеального дифференцирующего звена:**  
*a* – АФЧХ; *б* – АЧХ; *в* – ФЧХ; *г* – ЛАЧХ; *д* – переходная функция; *е* – функция веса



**Рис. 2.13. Частотные и временные характеристики с замедлением дифференцирующего звена:**  
*a* – АФЧХ; *б* – АЧХ; *в* – ФЧХ; *г* – ЛАЧХ; *д* – переходная функция; *е* – функция веса



**Рис. 2.14. Частотные и временные характеристики дифференцирующего звена первого порядка (форсирующего):**  
*a* – АФЧХ; *б* – АЧХ; *в* – ФЧХ; *г* – ЛАЧХ; *д* – переходная функция; *е* – функция веса

### 2.7. Динамические характеристики дифференцирующих звеньев

Наименование характеристик	Идеальное	С замедлением	Первого порядка (форсирующее)
Дифференциальное уравнение	$y(t) = K\dot{x}$	$T\ddot{y} + y(t) = K\dot{x}$	$y(t) = K_1(T\dot{x} + x(t))$
Передачная функция	$W(p) = Kp$	$W(p) = \frac{Kp}{1+Tp}$	$W(p) = K_1(1+Tp) = K_1 + K_2p;$ $T = K_2 / K_1$
АФЧХ	$W(j\omega) = Kj\omega$	$W(j\omega) = \frac{Kj\omega}{1+j\omega T}$	$W(j\omega) = K_1 + K_2j\omega = K_1 + j\omega K_1T$

Окончание табл. 2.7

Наименование характеристик	Идеальное	С замедлением	Первого порядка (форсирующее)
АЧХ	$M(\omega) = K\omega$	$M(\omega) = \frac{K\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$	$M(\omega) = K_1\sqrt{1+\omega^2 T^2}$
ФЧХ	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$	$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{1}{\omega T}\right)$	$\varphi(\omega) = \arctg\omega T$
ЛАЧХ	$L(\omega) = 20\lg(K\omega)$	$L(\omega) = 20\lg\frac{K\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$	$L(\omega) = 20\lg K_1 + 20\lg(1+\omega^2 T^2)^{\frac{1}{2}}$

### 2.2.8. Звено чистого запаздывания

Звено чистого (постоянного) запаздывания без искажения формы входного сигнала сдвигает его во времени, т.е.

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (2.65)$$

где  $\tau$  – время запаздывания.

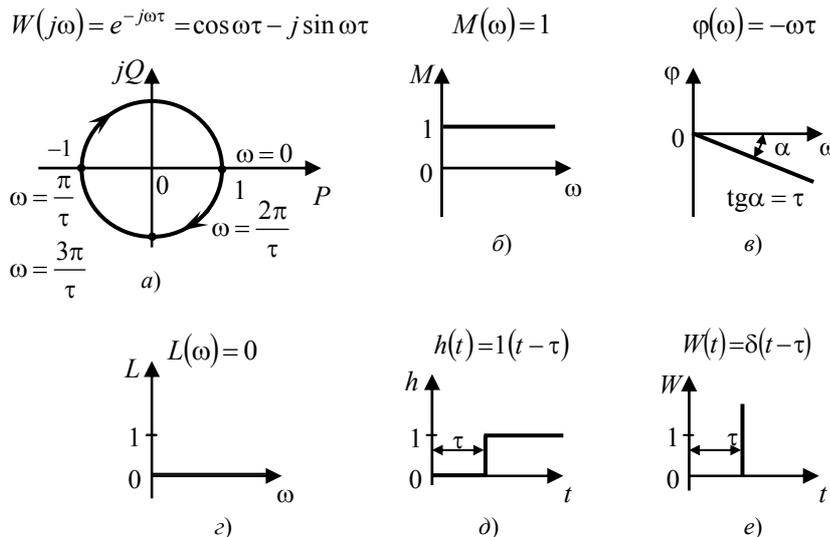


Рис. 2.15. Динамические характеристики звена чистого запаздывания: а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ; г – ЛАЧХ; д – переходная функция; е – функция веса

Примером такого звена являются различные линии задержки сигнала. Передаточная функция запаздывающего звена в соответствии с теоремой запаздывания (см. табл. 2.5) имеет вид

$$W(p) = e^{-p\tau}.$$

Другие динамические характеристики звена приведены на рис. 2.15.

Во многих случаях запаздывающее звено записывается с передаточным коэффициентом  $K$ , т.е.

$$y(t) = Kx(t - \tau), \quad W(p) = Ke^{-p\tau}$$

и т.д. Данное звено обычно используется в совокупности с другими звеньями.

### 2.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для определения характеристик САУ сначала составляют структурную схему системы из элементарных звеньев, затем схему преобразуют к удобному для анализа виду и записывают характеристики между выходными и входными переменными. Обычно преобразования производят с использованием аппарата передаточных функций.

Во многих случаях после преобразования структурную схему замкнутой системы автоматического управления приводят к виду, показанному на рис. 2.16. Здесь  $W_p(p)$ ,  $W_o(p)$  – передаточные функции соответственно регулятора и объекта управления;  $X(p)$ ,  $Y(p)$ ,  $V(p)$ ,  $E(p)$  – преобразованные по Лапласу входное воздействие (задающее воздействие)  $x(t)$ , выходная величина объекта (регулируемая величина)  $y(t)$ , возмущение  $v(t)$ , приложенное к входу объекта (входное возмущение), рассогласование (ошибка)  $e(t)$  между входом  $x(t)$  и выходом объекта  $y(t)$ .

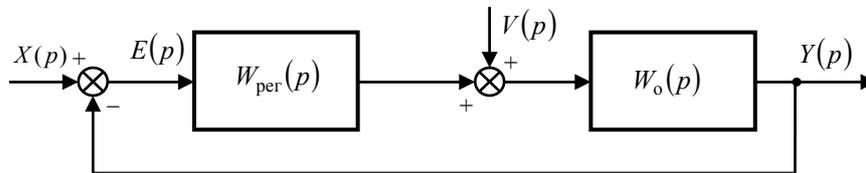


Рис. 2.16. Структурная схема системы автоматического регулирования

Используя свойство однонаправленности звеньев и на основе принципа суперпозиции можно записать уравнения, позволяющие определить выход  $y(t)$  и ошибку  $e(t)$  в зависимости от входа  $x(t)$ , возмущения  $v(t)$  и характеристик  $W_p(p)$ ,  $W_o(p)$ . Эти уравнения имеют следующий вид:

$$Y(p) = \Phi_{xy}(p) X(p) + \Phi_{vy}(p) V(p); \quad (2.66)$$

$$E(p) = \Phi_{xe}(p) X(p) + \Phi_{ve}(p) V(p), \quad (2.67)$$

где  $\Phi_{xy}(p)$ ,  $\Phi_{vy}(p)$  – передаточные функции выхода замкнутой САУ относительно задающего воздействия  $x$  и возмущения  $v$  соответственно;  $\Phi_{xe}(p)$ ,  $\Phi_{ve}(p)$  – передаточные функции ошибки замкнутой САУ соответственно относительно  $x$  и  $v$ .

В соответствии с формулами (2.4) и (2.6) эти передаточные функции определяются выражениями

$$\Phi_{xy}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)}; \quad (2.68)$$

$$\Phi_{vy}(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{Y(p)}{V(p)}; \quad (2.69)$$

$$\Phi_{xe}(p) = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{E(p)}{X(p)}; \quad (2.70)$$

$$\Phi_{ve}(p) = \frac{-W_o(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{E(p)}{V(p)}, \quad (2.71)$$

где  $W_{\text{раз}}(p)$  – передаточная функция разомкнутой САУ, т.е.

$$W_{\text{раз}}(p) = W_p(p) W_o(p). \quad (2.72)$$

Из (2.68) следует, что  $W_{\text{раз}}(p) = \frac{\Phi_{xy}(p)}{1 - \Phi_{xy}(p)}$ .

В общем виде для разомкнутой САУ имеет место

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{K_r \prod_{i=1}^m (1 + T_i p)}{p^r \prod_{j=1}^{n-r} (1 + T_j p)} = \frac{Y(p)}{X(p)}, \quad m < n, \quad (2.73)$$

где  $n$  – порядок дифференциального уравнения замкнутой системы;  $m, r$  – количества форсирующих и интегрирующих звеньев соответственно;  $K_r$  – коэффициент передачи системы по  $r$ -й производной входного воздействия;  $T_i, T_j$  – постоянные времени звеньев, входящих в систему.

Выражение (2.73) учитывает, что в схему САУ могут входить безынерционные, аperiodические, интегрирующие и форсирующие звенья. Для многих реальных САУ  $m = 1$  и  $r \leq 2$ .

Замкнутая САУ, не содержащая интегрирующих звеньев, т.е. при  $r = 0$ , называется статической, для нее

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{K_0 \prod_{i=1}^m (1 + T_i p)}{\prod_{j=1}^n (1 + T_j p)}. \quad (2.74)$$

САУ, содержащая одно интегрирующее звено ( $r = 1$ ), т.е.

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{K_1 \prod_{i=1}^m (1 + T_i p)}{p \prod_{j=1}^{n-1} (1 + T_j p)}, \quad (2.75)$$

называется астатической с астатизмом первого порядка; здесь  $K_1$  – коэффициент передачи системы по скорости (добротность по скорости).

Соответственно астатическая система с астатизмом второго порядка имеет передаточную функцию

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{K_2 \prod_{i=1}^m (1 + T_i p)}{p^2 \prod_{j=1}^{n-2} (1 + T_j p)}; \quad (2.76)$$

здесь  $K_2$  – коэффициент передачи системы по ускорению (добротность по ускорению).

Заметим, что с увеличением порядка астатизма точность САУ возрастает.

Дифференциальное уравнение линейной замкнутой САУ, соответствующее передаточной функции (2.68), можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \quad m \leq n. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Используя обозначение оператора дифференцирования  $\frac{d}{dt} = p$  уравнение (2.77) принимает вид

$$\left( \sum_{j=0}^n a_j p^j \right) y(t) = \left( \sum_{i=0}^m b_i p^i \right) x(t) \quad (2.78)$$

или в операторной форме

$$y(t) = \Phi(p) x(t); \quad (2.79)$$

здесь

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{A(p)}; \quad B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i; \quad A(p) = \sum_{j=0}^n a_j p^j. \quad (2.80)$$

Следует заметить, что в (2.78) – (2.80) символ  $p$  не тождественен параметру преобразования Лапласа  $p = c + j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$ . Системы, у которых порядок числителя  $m$  передаточной функции  $\Phi(p)$  меньше порядка знаменателя, называются *правильными*.

Дифференциальное уравнение (2.77) характеризует динамические свойства системы с позиции внешнего описания в переменных «вход-выход». В настоящее время более часто употребляется описание системы в пространстве состояний с записью дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши.

Вектор состояния  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$  представляет собой минимальный набор переменных, однозначно характеризующий рассматриваемую систему в данный момент времени  $t = t_0$  и позволяющий при известных входных воздействиях  $x(t), t \in [t_0, t_k]$  получить такой же набор  $z(t) \forall t \in [t_0, t_k]$ . При изменении  $t$  на интервале времени  $[t_0, t_k]$  конец вектора  $z$  описывает кривую, т.е. траекторию  $z(\bullet) = (z(t), t \in [t_0, t_k])$  в пространстве состояний.

Описание системы в пространстве состояний в отличие от внешнего описания "вход-выход" называют внутренним. В пространстве состояний система описывается уравнениями

$$\dot{z} = Az(t) + Bx(t); \tag{2.81}$$

$$y(t) = Cz(t) + Dx(t), \tag{2.82}$$

где  $z \in R^n, x \in R^m, y \in R^r$  –  $n$ -вектор состояния,  $m$ -вектор входа и  $r$ -вектор выхода, соответственно;  $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{r \times n}, D \in R^{r \times m}$  – матрицы состояния (системы), управления и выходных координат соответствующих размерностей.

Структурная схема системы, описываемой уравнениями (2.81), (2.82) приведена на рис. 2.17.

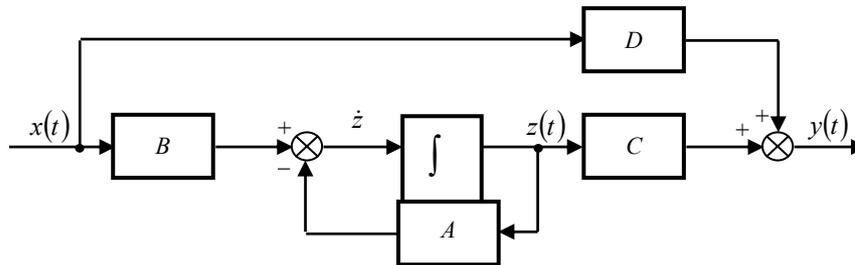


Рис. 2.17. Структурная схема системы в пространстве состояний

В качестве примера рассмотрим переход от описания системы в переменных "вход-выход" (2.77) к описанию в пространстве состояний (2.81) для модели

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t).$$

Введем  $n$ -мерный вектор состояния  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$  следующим образом:

$$z_1(t) = y(t), z_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \dots, z_n(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}.$$

В этом случае можно записать систему уравнений в нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2(t); \\ \dot{z}_2 &= z_3(t); \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n(t); \\ \dot{z}_n &= -a_0 z_1(t) - a_1 z_2(t) - \dots - a_{n-1} z_n(t) + x(t). \end{aligned}$$

Данная система в векторно-матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x(t)$$

или

$$\dot{z} = Az(t) + Bx(t),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 - a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  в таком виде называется матрицей Фробениуса или матрицей сопровождения.

Обычно в качестве выхода системы рассматривается  $y(t) = z_1(t)$ , тогда матрица  $C$  (2.82) для рассматриваемого примера записывается как  $n$ -вектор строка  $C = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$ .

Для расчета вектора  $z(t)$  при  $t > t_0$  и внешних воздействиях используется выражение

$$z(t) = e^{A(t-t_0)}z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau) d\tau, \quad (2.83)$$

где  $e^{A(t-t_0)}$  – матричная экспонента (матрицант, матрица перехода, переходная матрица), для которой справедливы формулы

$$e^{At} \cdot e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}, \quad e^A \cdot e^B = e^{A+B} \quad (\text{если } AB = BA),$$

$$e^{A^T t} = (e^{At})^T, \quad \frac{d}{dt}e^{At} = e^{At} \cdot A \quad \text{и др.}$$

Матрица весовых функций (весовая матрица, импульсная переходная функция) системы определяется выражением

$$K(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau). \quad (2.84)$$

Выходной вектор с учетом (2.83), (2.84) вычисляется по формулам

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}z(t_0) + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bx(\tau) d\tau + Dx(t) =$$

$$= Ce^{A(t-t_0)}z(t_0) + \int_{t_0}^t K(t-\tau)x(\tau) d\tau \quad (2.85)$$

и при  $z(t_0) = 0$

$$y(t) = \int_{t_0}^t K(t-\tau)x(\tau) d\tau. \quad (2.86)$$

## 2.8. Матричные экспоненты динамических систем

Матрица состояния, $A$	Матрица перехода
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a}(1-e^{at}) \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$	$\mathcal{D} = a_2^2 + 4a_1 > 0; \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}}} \begin{pmatrix} -(a_2 + \alpha)e^{-\alpha t} + (a_2 + \beta)e^{-\beta t} & e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \\ a_1(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) & \beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t} \end{pmatrix}; \alpha = -0,5(a_2 + \sqrt{\mathcal{D}}),$ $\beta = -0,5(a_2 - \sqrt{\mathcal{D}});$ $\mathcal{D} = 0: \begin{pmatrix} (1 - 0,5a_2t)e^{0,5a_2t} & te^{0,5a_2t} \\ a_2te^{0,5a_2t} & (1 + 0,5a_2t)e^{0,5a_2t} \end{pmatrix};$ $\mathcal{D} < 0: \omega = \sqrt{-(a_2^2/4 + a_1)};$ $\begin{pmatrix} \left( \cos \omega t - \frac{a_2}{2\omega} \sin \omega t \right) e^{0,5a_2t} & \frac{1}{\omega} \sin \omega t e^{0,5a_2t} \\ \frac{a_1}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{0,5a_2t} & \left( \cos \omega t + \frac{a_2}{2\omega} \sin \omega t \right) e^{0,5a_2t} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & t & 0,5t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В табл. 2.8 приведены матричные экспоненты для ряда динамических систем второго и третьего порядка. Для определения  $e^{At}$  используется соотношение

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ [pI - A]^{-1} \}, \quad (2.87)$$

где  $\mathcal{L}^{-1}$  – оператор обратного преобразования Лапласа;  $I$  – единичная матрица.

## 2.4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основными задачами анализа САУ являются: анализ устойчивости системы; исследование поведения системы в переходном режиме и определение переходных динамических ошибок; анализ точности системы в установившемся состоянии.

### 2.4.1. Устойчивость. Основные понятия

Проблема устойчивости играет важнейшую роль для обеспечения работоспособности САУ. В настоящее время существует несколько подходов к понятию устойчивости. Наиболее общим и распространенным подходом является рассмотрение устойчивости как категории, относящейся к собственным движениям системы, порождаемыми начальными условиями и внутренними ее свойствами. При этом начальные условия рассматриваются как возмущения, а внутренние свойства системы задаются ее оператором.

Обычно для определения понятий устойчивости используется конечномерное евклидово пространство состояний  $R^n$  и запись движения системы в виде дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши

$$\dot{z}_i = f_i(z_1, z_2, \dots, z_n, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.88)$$

или для линейной САУ

$$\dot{z} = Az(t), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T. \quad (2.89)$$

В пространстве  $R^n$  выделяется множество (область)  $G_0 \subset R^n$  начальных состояний  $z(t_0)$  и множество  $G_k$  конечных состояний ( $z$ -движений). Последнее обычно задается в пространстве  $R^n$  и времени. Элементы  $G_k$  могут состоять как из одной точки  $z$  (начала координат), так и удовлетворять уравнению процесса вида (2.88). Множество  $G_k$  называют множеством невозмущенных состояний (невозмущенных движений или процессов), а  $G_0$  – "областью притяжения". Движение, начавшееся при  $z(t_0) \in G_0$  с течением времени попадает в  $G_k$ . Множество невозмущенных движений  $G_k$  называется асимптотически устойчивым с областью притяжения  $G_0$ , если всякое движение, начавшееся при  $z(t_0) \in G_0$ , в силу свойств оператора системы с течением времени приходит в сколь угодно малую окрестность  $G_k$ .

Система обладает устойчивостью в целом или в большом, если область  $G_0$  охватывает все пространство состояний, в котором система может реально находиться. Качественное представление понятий устойчивости "в большом", "в малом" и неустойчивости показано на рис. 2.18.

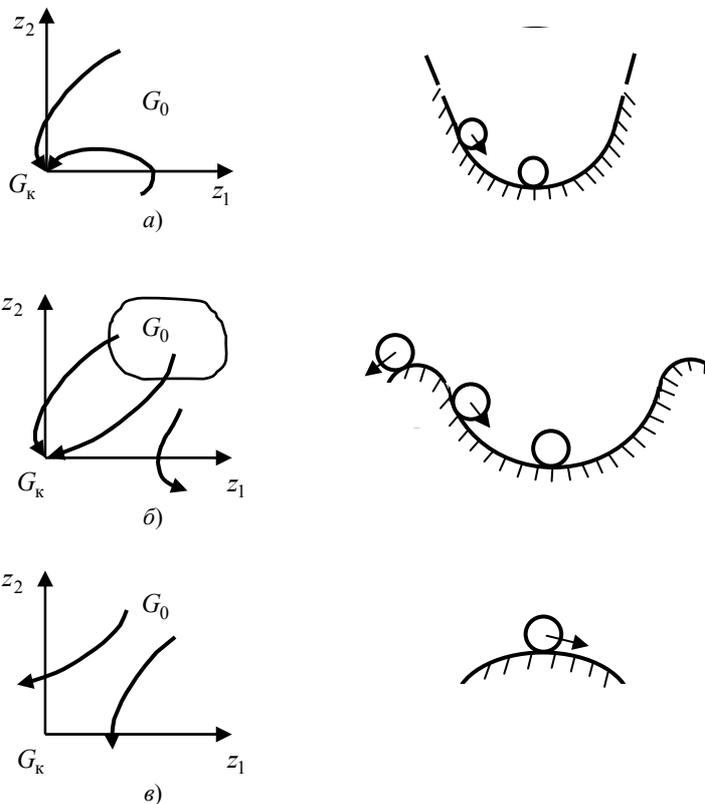


Рис. 2.18. Система, "устойчивая в большом" (а), "устойчивая в малом" (б) и неустойчивая (в)

На примере одномерных стационарных линейных систем это означает следующее. Реальное изменение выходного сигнала для таких систем при входном  $x(t)$  и ненулевых начальных условиях определяется выражением

$$y(t) = y_c(t) + \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau = y_c(t) + y_b(t);$$

здесь  $y_c(t)$  – свободная составляющая движения;  $y_b(t)$  – вынужденная составляющая, обусловленная входом  $x(t)$ ;  $K(t)$  – импульсная переходная функция системы. В данном случае за невозмущенное движение принимается  $y_b(t)$ , а за отклонение или вариацию –  $y_c(t)$ .

Согласно определению устойчивости по А.М. Ляпунову система *асимптотически устойчива*, если  $y_c(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . При этом заданное невозмущенное движение является устойчивым, если для возмущенного движения  $y_c(t) + y_b(t)$ , порожденного начальными условиями  $y(t=0)$ , по истечении некоторого времени будет выполняться условие

$$|y_b(t) - y(t)| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – некоторая заданная постоянная величина.

Рассмотрим подробнее структуру выходного сигнала  $y(t)$  для простейшей системы с обратной связью, представленной на рис. 2.19.

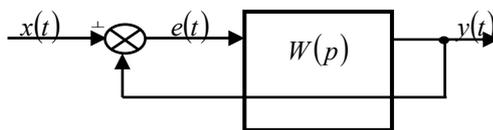


Рис. 2.19. Система с обратной связью

В соответствии с (2.77) дифференциальное уравнение замкнутой САУ имеет вид

$$\sum_{v=0}^n a_v y^{(v)} = \sum_{v=0}^m b_v x^{(v)}, \quad m < n. \quad (2.90)$$

При поданном в момент времени  $t = 0$  входном воздействии

$$X(p) = \frac{c_k p^k + c_{k-1} p^{k-1} + \dots + c_0}{d_s p^s + d_{s-1} p^{s-1} + \dots + d_0} \quad (2.91)$$

и ненулевых начальных условиях

$$Y^0 = (y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)) \neq 0,$$

после соответствующего преобразования по Лапласу имеет место

$$\begin{aligned} & a_n [p^n Y(p) + p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] + \\ & + a_{n-1} [p^{n-1} Y(p) + p^{n-2} y(0) - p^{n-3} y'(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \dots \\ & \dots + a_0 Y(p) = b_m p^m Y(p) + b_{m-1} p^{m-1} X(p) + \dots + b_0 X(p) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) Y(p) - (y(0) N_0(p) + \dots + y^{(n-1)}(0) N_{n-1}(p)) = \\ & = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) X(p) \end{aligned} \quad (2.92)$$

здесь  $N_i(p)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  – полиномы степеней  $p$ . Подставляя (2.91) в (2.92), получаем изображение выходного сигнала

$$\begin{aligned} Y(p) = & \frac{g_{m+k} p^{m+k} + \dots + g_0}{(a_n p^n + \dots + a_0)(d_s p^s + \dots + d_0)} + \\ & + \frac{y(0) N_0(p) + \dots + y^{(n-1)}(0) N_{n-1}(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Расчетом корней уравнений

$$B(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad (2.94)$$

$$D(p) = d_s p^s + d_{s-1} p^{s-1} + \dots + d_0 = 0 \quad (2.95)$$

определяются соответственно полюса системы  $p_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  и изображения воздействия  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, s}$ . Предполагается, что все корни действительные.

В этом случае  $y(t)$  можно записать в виде суммы трех составляющих

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i^w e^{p_i t} + \sum_{j=1}^s c_j^x e^{\alpha_j t} + \sum_{i=1}^n c_i^c e^{p_i t} = y_n(t) + y_x(t) + y_c(t); \quad (2.96)$$

здесь  $c_i^w$ ,  $c_i^c$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $c_j^x$ ,  $j = \overline{1, s}$  – коэффициенты, зависящие от нулей передаточной функции и входного воздействия  $X(p)$ ;  $y_n(t)$  – сигнал, определяемый полюсами передаточной функции системы и характеризующий динамические свойства системы в переходном режиме;  $y_x(t)$  – сигнал, определяемый полюсами изображения  $X(p)$ ;  $y_c(t)$  – сигнал, вызванный ненулевыми начальными условиями и определяемый через полюса системы.

Сигнал  $y_n(t)$  называют собственным движением системы при обработке воздействия  $x(t)$ , это переходная составляющая  $y(t)$ . Сигнал  $y_x(t)$  называют установившейся составляющей при обработке  $x(t)$ . Составляющая  $y_c(t)$  характеризует свободные колебания системы, которые порождены ненулевыми начальными условиями.

Устойчивая система обладает ограниченной реакцией. Если система подвергается воздействию ограниченного входного сигнала  $x(t)$ , и ее реакция  $y(t)$  также ограничена по модулю, то такую систему называют устойчивой. Если воздействие  $x(t)$  ограничено, то и составляющая  $y_x(t)$ , определяемая формулой (2.96), также ограничена, так как аналитическая зависимость  $y_x(t)$  порождена полюсами воздействия  $x(t)$ , ограниченного по модулю. Выход системы при ограниченном по модулю входе  $x(t)$  становится неограниченным только в случае, если в зависимостях  $y_n(t)$  и  $y_c(t)$ , по крайней мере, одно из слагаемых является неограниченным. Этого не может быть, если действительная часть каждого из полюсов передаточной функции  $p_i$  отрицательна ( $p_i < 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ).

Таким образом, для того, чтобы линейная стационарная система была устойчивой, все корни ее характеристического уравнения (2.94) (полюса передаточной функции) должны располагаться в левой половине комплексной  $p$ -плоскости (рис. 2.20). Если отдельные полюса передаточной функции находятся в правой полуплоскости, то система будет неустойчивой. В случае, когда имеются корни характеристического уравнения, расположенные на мнимой оси, а все остальные корни в левой полуплоскости, то выходная переменная  $y(t)$  будет иметь вид незатухающих колебаний при ограниченном входе. Такая система находится на границе устойчивости.

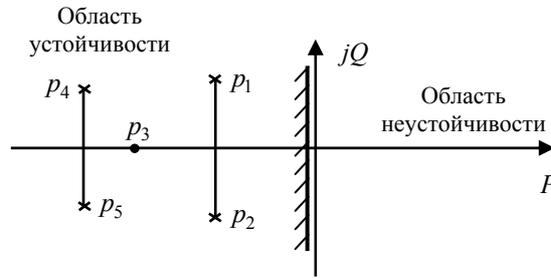


Рис. 2.20. Комплексная плоскость

Корни  $p_i$ , лежащие строго в левой полуплоскости, называют левыми. Чтобы система была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (2.94) были левыми. В устойчивой системе затухают как свободная составляющая  $y_c(t)$ , так и переходные колебания  $y_n(t)$  вынужденного движения. После затухания  $y_c(t)$  и  $y_n(t)$  выходной сигнал линейной системы при входном сигнале

$$x(t) = c_1^3 e^{\alpha_1 t} + c_2^3 e^{\alpha_2 t} + c_s^3 e^{\alpha_s t}$$

имеет тот же вид

$$y_x(t) = c_1^x e^{\alpha_1 t} + c_2^x e^{\alpha_2 t} + \dots + c_s^x e^{\alpha_s t}.$$

Таким образом, в устойчивой системе ошибка  $e(t)$  в установившемся режиме определяется разностью  $x(t) - y_x(t)$  и равна

$$e(t) = (c_1^3 - c_1^x) e^{\alpha_1 t} + (c_2^3 - c_2^x) e^{\alpha_2 t} + \dots + (c_p^3 - c_s^x) e^{\alpha_s t}.$$

Импульсная переходная функция (ИПФ)  $K(t)$  системы определяется полюсами  $p_1, p_2, \dots, p_n$  и имеет вид

$$K(t) = L^{-1}\{W(s)\} = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t}.$$

Если все полюса  $p_1, p_2, \dots, p_n$  левые, то  $\int_0^{\infty} |K(t)| dt < \infty$ . Следовательно, для устойчивой САУ необходимо и доста-

точно, чтобы ее ИПФ была абсолютно интегрируемой. Таким образом, если корни *характеристического уравнения* системы (2.94) являются левыми и  $n > m$ , то САУ является устойчивой.

Анализ устойчивости можно производить без вычисления корней характеристического уравнения системы. Правила, позволяющие делать выводы об устойчивости системы без вычисления корней характеристического уравнения, называются *критериями устойчивости*. Все применяемые критерии определяют условия, при которых корни характеристического уравнения находятся в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ . В ряде случаев критерии устойчивости позволяют выяснить влияние параметров системы и ее структурных изменений на устойчивость. Математически различные виды критериев устойчивости эквивалентны, так как все они определяют условия, при которых корни характеристического уравнения являются левыми. Наиболее широкое применение находят алгебраические и частотные критерии устойчивости.

### 2.4.2. Алгебраические критерии устойчивости

Критерии, которые позволяют определить, устойчива ли система, с помощью только алгебраических процедур над коэффициентами характеристического уравнения, называют алгебраическими.

*Критерий Гурвица.* Для применения данного критерия составляется  $n \times n$  матрица из коэффициентов характеристического уравнения. По главной диагонали в матрице размещаются элементы  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Затем столбцы матрицы дополняются снизу и сверху коэффициентами следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}. \quad (2.97)$$

Если индекс коэффициента меньше нуля или больше  $n$ , а также при отсутствии данного коэффициента в характеристическом уравнении, на соответствующее место в матрице (2.97) записывается нуль.

Критерий Гурвица формулируется следующим образом: для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $a_0 > 0$  и определители Гурвица  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  были положительны.

Для характеристических уравнений с большим  $n$  порядок определителей возрастает, и практическое вычисление их обычным путем становится громоздким. В этих случаях можно использовать необходимое (но недостаточное) условие устойчивости, которое заключается в том, что в случае уравнения  $n$ -го порядка все коэффициенты  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  должны быть положительны и не один из них не должен равняться нулю.

**Пример 2.1.** Используя критерий Гурвица, получим условия устойчивости для систем с  $n = 2, 3, 4$ .

Пусть  $B(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$ , т.е.  $n = 2$ , тогда система устойчива, если  $a_0 > 0$ ;  $\Delta_1 = a_1 > 0$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$ ,

или  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$ .

Для случая  $n = 3$ , т.е.  $B(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$  из рассмотрения определителей Гурвица

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

следует, что условия устойчивости имеют вид:

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; a_3 > 0.$$

Если САУ имеет характеристическое уравнение четвертого порядка  $B(p) = a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$ , то

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix},$$

и условиями устойчивости являются:

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_4 > 0; a_3(a_1 a_2 - a_4 a_1) > 0.$$

Так как  $a_n > 0$ , то достаточно проверить, чтобы положительными были определители Гурвица от  $\Delta_1$  до  $\Delta_{n-1}$ .

Система находится на границе устойчивости, если определители Гурвица  $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$  положительны, а главный определитель  $a_n, \Delta_{n-1}$  равен нулю.

Если  $a_n = 0$ , а  $\Delta_{n-1} > 0$ , то один из корней характеристического уравнения равен нулю (система находится на границе аperiodической устойчивости). В случае, когда  $a_n \neq 0$ , а  $\Delta_{n-1} = 0$ , два комплексно сопряженных корня характеристического уравнения находятся на мнимой оси и система находится на границе колебательной устойчивости. Следует заметить, что иногда матрицу Гурвица (2.97) записывают в другом виде, например,

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В этом случае система устойчива, если

$$a_n > 0, \Delta_1 = a_{n-1} > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, \dots \Delta_n > 0.$$

Полином (2.109) может быть записан в виде

$$B_1(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Если корни полинома не содержат положительных вещественных частей, то его называют полиномом Гурвица. Если же все корни имеют отрицательные вещественные части, то полином называется строгим по Гурвицу.

*Критерий Лъенара-Шипара* является некоторым упрощением критерия Гурвица. Он формулируется следующим образом: если все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то для устойчивости системы необходимо

и достаточно, чтобы среди определителей Гурвица  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  были положительными все определители с четными индексами или все определители с нечетными индексами, т.е. должно выполняться

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, \dots, a_0 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \dots \quad (2.98)$$

или

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, \dots, a_0 > 0, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots \quad (2.99)$$

Применение алгебраических критериев для систем с характеристическими уравнениями выше четвертого порядка дает возможность определять устойчивость при заданных численных значениях коэффициентов, однако исследование влияния отдельных параметров системы на ее устойчивость встречает здесь значительные трудности.

### 2.4.3. Частотные критерии устойчивости

Широкое распространение на практике получили частотные критерии устойчивости, которые позволяют обойтись без вычисления корней характеристического уравнения. В этих критериях исследуется уравнение характеристической кривой, получающейся заменой в (2.94)  $p$  на  $j\omega$

$$B(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 = P(\omega) + jQ(\omega);$$

$$P(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots; \quad Q(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \quad (2.100)$$

*Критерий Михайлова.* В соответствии с данным критерием САУ будет устойчивой, если при возрастании частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  вектор  $B(j\omega)$  повернется на угол  $n\pi/2$ . Другими словами, САУ устойчива, если годограф вектора  $B(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  последовательно "обходит"  $n$  квадрантов в положительном направлении (против часовой стрелки).

На рис. 2.21, а показаны примеры годографов для устойчивых систем с  $n = 1, n = 2, \dots, n = 5$ . Так, при  $n = 2$  изменение аргумента равно  $\pi$  и годограф проходит через два квадранта. На рис. 2.21, б приведен годограф неустойчивой системы с  $n = 4$ . Система находится на границе устойчивости, если ее годограф пересекает начало координат, обходя при этом  $n - 1$  квадрантов. Здесь частота  $\omega$  является одновременно корнем уравнений  $P(\omega) = 0$  и  $Q(\omega) = 0$ .

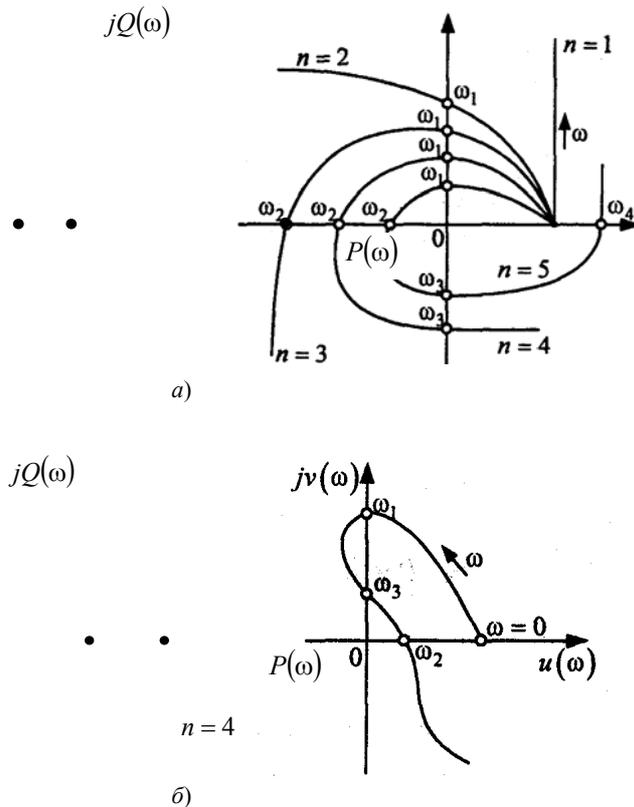


Рис. 2.21. Годографы для устойчивых систем ( $n = \overline{1,5}$ ) (а) и неустойчивой системы (б)

На основе рассмотрения функций  $P(\omega), Q(\omega)$   $\omega \in (0, \infty)$  формулируется критерий перемежаемости корней: если между двумя соседними корнями  $Q(\omega) = 0$  лежит корень уравнения  $P(\omega) = 0$  (или между двумя соседними корнями  $P(\omega) = 0$  находится корень уравнения  $Q(\omega) = 0$ ), и сумма корней равна  $n$ , то система будет устойчива.

На рис. 2.22, а при  $n = 4$  изображены кривые  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$ , соответствующие устойчивой системе, а на рис. 2.22, б – неустойчивой.

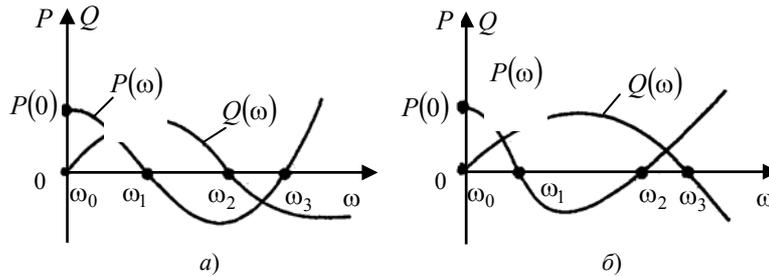


Рис. 2.22. Вещественная и мнимая части кривой  $B(j\omega)$  устойчивой (а) и неустойчивой (б) САУ  $n = 4$

*Критерий Найквиста (Найквиста-Михайлова или амплитудно-фазовый критерий устойчивости).* Данный критерий позволяет делать вывод об устойчивости САУ с обратной связью на основе рассмотрения частотных характеристик разомкнутой системы.

Для разомкнутой САУ критерий формулируется следующим образом: САУ с включенной обратной связью будет устойчивой, если АФХ разомкнутой системы  $W_{раз}(j\omega)$  при возрастании частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  не охватывает точки с координатами  $(-1, j0)$  (рис. 2.29, а, б). Заметим, что случай, представленный на рис. 2.23, а соответствует абсолютной устойчивости, а на рис. 2.23, б – относительной. Относительно устойчивая система при уменьшении передаточного коэффициента может стать неустойчивой. Если годограф проходит через точку  $(-1, j0)$  (рис. 2.23, в), то система находится на границе устойчивости, и если АФХ  $W_{раз}(j\omega)$  охватывает точку  $(-1, j0)$ , то замкнутая САУ будет неустойчива (рис. 2.23, з).

В случае многоконтурных САУ с местными обратными связями и систем, содержащих неустойчивые звенья, разомкнутая система может быть неустойчивой. Здесь замкнутая САУ будет устойчивой, если АФХ  $W_{раз}(j\omega)$  охватывает точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении  $n_1/2$  раз, где  $n_1$  – число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью для разомкнутой системы. За положительное направление принимается переход  $W_{раз}(j\omega)$  из верхней полуплоскости в нижнюю при возрастании  $\omega$ , переход из нижней полуплоскости в верхнюю считается отрицательным.

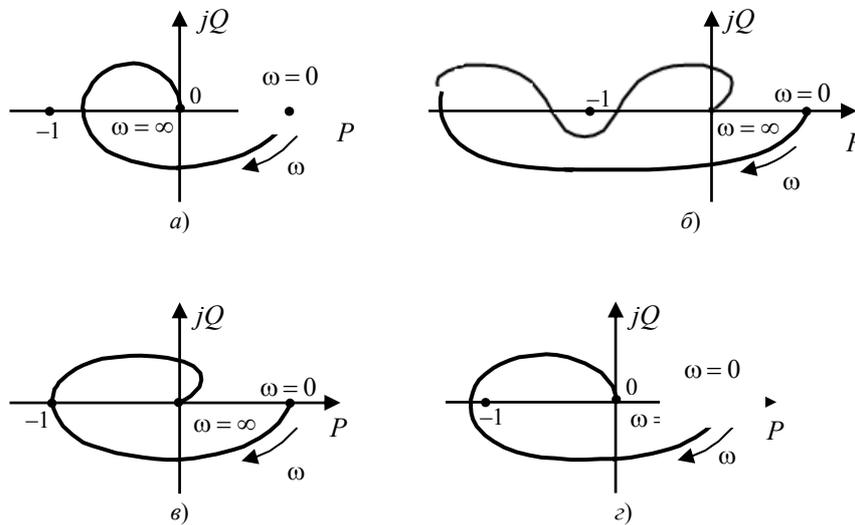
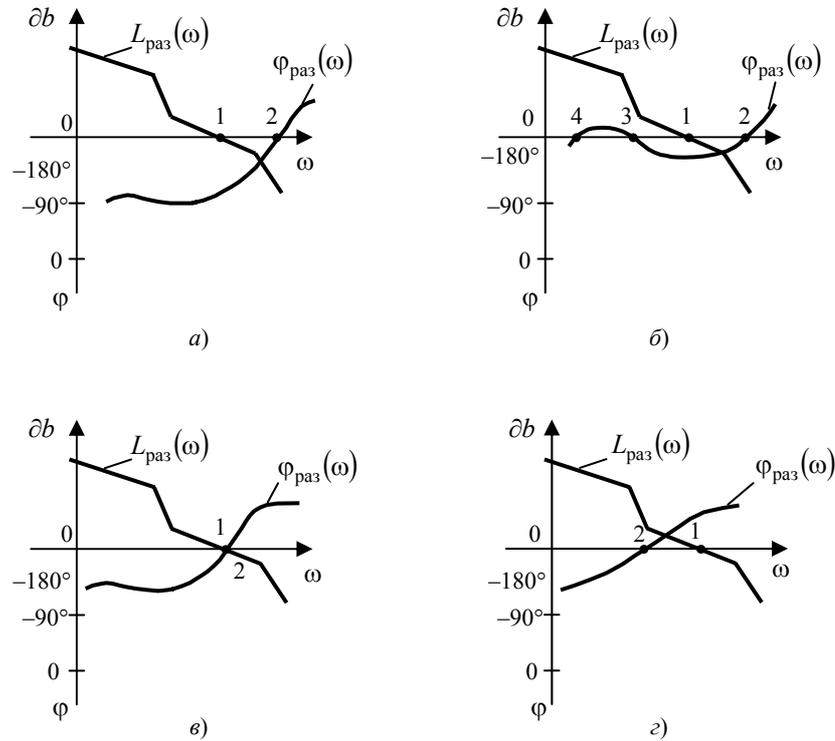


Рис. 2.23. Годографы разомкнутой САУ для устойчивой системы в замкнутом состоянии (а, б), на границе устойчивости (в) и неустойчивой (з)

Часто используется следующая формулировка критерия: замкнутая САУ устойчива, если разность между положительными переходами  $W_{раз}(j\omega)$  отрезка действительной оси  $(-\infty, -1)$  равна  $\pm n_1/2$ . При этом, если  $W_{раз}(j\omega)$  начинается (при  $\omega = 0$ ) на отрезке действительной оси  $(-\infty, -1)$ , то считается, что  $W_{раз}(j\omega)$  совершает при  $\omega = 0$  половину перехода. В случае  $n_1 = 0$ , т.е. при устойчивой или нейтрально устойчивой разомкнутой САУ, замкнутая система будет устойчивой, если число положительных и отрицательных переходов  $W_{раз}(j\omega)$  на отрезке  $(-\infty, -1)$  одинаково.

Важным достоинством критерия Найквиста-Михайлова является то, что он может применяться для исследования устойчивости по экспериментально полученным АФХ разомкнутой САУ или ее звеньев, а также делать оценки по качеству переходных процессов.

Для проверки устойчивости наряду с  $W_{раз}(j\omega)$  могут использоваться логарифмическая амплитудная характеристика  $L_{раз}(\omega)$  и логарифмическая фазовая характеристика  $\varphi_{раз}(\omega)$  разомкнутой системы [1] (рис. 2.24).

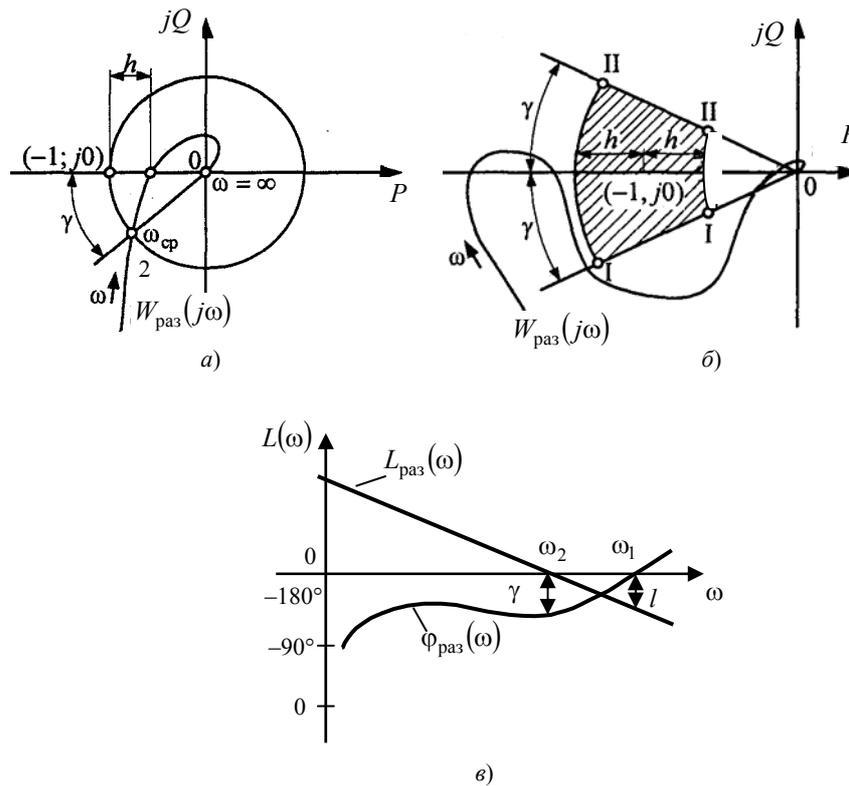


**Рис. 2.24.** Логарифмические характеристики разомкнутой системы для устойчивой (а, б), на границе устойчивости (в) и неустойчивости (г) в замкнутом состоянии системы

Если точка пересечения  $L_{раз}(\omega)$  с осью нуля децибел (точка 1) лежит левее точки, где  $\varphi_{раз}(\omega) = -180^\circ$  (точка 2), то замкнутая САУ будет абсолютно устойчива или относительно устойчива (рис. 2.24, а, б). Если точка 1 и 2 совпадают, то имеет случай колебательной границы устойчивости замкнутой системы (рис. 2.24, в), а если точка 1 расположена правее точки 2, то замкнутая САУ будет неустойчива (рис. 2.24, г).

#### 2.4.4. Запас устойчивости

Для обеспечения работоспособности САУ в процессе эксплуатации важную роль играет создание при проектировании системы требуемого запаса устойчивости. Этот запас может оцениваться с использованием частотных и переходных характеристик.



**Рис. 2.25.** Запасы устойчивости по модулю и фазе (а), зона устойчивости (б) и запасы устойчивости, определяемые по логарифмическим частотным характеристикам (в)

На рис. 2.25, а приведены показатели запаса устойчивости по модулю и фазе, получаемые из рассмотрения годографа  $W_{\text{раз}}(j\omega)$  разомкнутой системы относительно критической точки  $(-1, j0)$ . *Запасом устойчивости по модулю* называется минимальный отрезок действительной оси  $h$ , характеризующий расстояние между критической и ближайшей точкой пересечения годографа  $W_{\text{раз}}(j\omega)$  с действительной осью (точка 1), а минимальный угол  $\gamma$ , образуемый радиусом, проходящим через точку 2 пересечения годографа  $W_{\text{раз}}(j\omega)$  с окружностью единичного радиуса и отрицательной частью оси  $P(j\omega)$ , называют *запасом устойчивости по фазе*.

Система обладает требуемым запасом устойчивости по модулю  $h$  и фазе  $\gamma$ , если годограф  $W_{\text{раз}}(j\omega)$  не заходит в заштрихованную область, выделенную на рис. 2.25, б, огибая ее снизу.

Если при анализе устойчивости используются логарифмические частотные характеристики (рис. 2.25, в), то запас устойчивости системы по модулю характеризует отрезок  $l = 20 \lg h$  при частоте  $\omega_1$ , соответствующей  $\varphi_{\text{раз}}(\omega_1) = -180^\circ$ . Запас устойчивости системы по фазе равен углу  $\gamma$ , определяемому по значению  $\varphi_{\text{раз}}(\omega_2)$  и линией  $-180^\circ$  (рис. 2.25, в).

Для определения запаса устойчивости САУ может использоваться также переходная характеристика  $y(t)$ , получаемая при обработке скачкообразного входного воздействия. Если переходной процесс колебательный, то запас устойчивости характеризуется показателем  $\sigma$ , который называется перерегулированием. Перерегулирование рассчитывается по формуле

$$\sigma \% = \frac{y_{\text{max}} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 \%,$$

здесь предполагается, что установившееся значение  $y(\infty)$  после завершения переходного процесса, отлично от нуля.

Допустимое значение перерегулирования для САУ устанавливается на основе опыта эксплуатации подобных систем. Обычно считается, что запас устойчивости достаточен, если величина  $\sigma$  не более 10...30%. Дополнительно к величине перерегулирования может задаваться допустимое число колебаний за время переходного процесса, оно не должно превышать 1...3.

### 2.4.5. Качество работы систем автоматического управления

При анализе качества работы САУ с обратной связью, в которой выходная величина  $y(t)$  должна по возможности мало отличаться от входной  $x(t) = y_{\text{зад}}(t)$  обычно используются тестовые (типовые) входные воздействия, которые неблагоприятны для системы. Если для тестового входного сигнала выходной сигнал удовлетворяет требуемым условиям, то с большей вероятностью можно предполагать, что  $y(t)$  будет соответствовать этим условиям и при других воздействиях. Наиболее часто в качестве тестовых сигналов используются ступенчатая функция, дельта-функция и другие, приведенные на рис. 2.26.

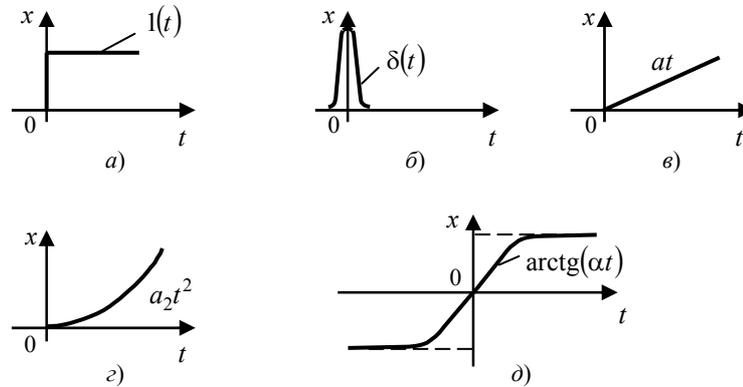


Рис. 2.26. Тестовые входные воздействия: ступенчатая функция (а), дельта-функция (б), линейная функция (в), квадратичная функция (г), функция арктангенса (д)

Если  $x(t) = 1(t)$ , то изображение выходного сигнала при нулевых начальных условиях для одномерной линейной стационарной САУ имеет вид

$$Y(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \cdot \frac{1}{p} = \frac{A(p)}{pB(p)}, \quad m < n, \quad (2.101)$$

а оригинал  $y(t)$ , соответствующий изображению (2.101), равен

$$y(t) = C_0 e^{p_0 t} + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}; \quad (2.102)$$

здесь  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – корни уравнения  $B(p) = 0$  (полюса системы), а  $p_0 = 0$  – нулевой корень, порожденный воздействием  $x(t) = 1(t)$ .

Качество работы САУ оценивается с помощью критериев, которые можно разбить на четыре группы:

- 1 критерии точности, характеризующие величину ошибки между требуемым и действительным значением регулируемой величины в различных режимах работы;
- 2 критерии, характеризующие быстродействие системы, т.е. насколько быстро САУ обрабатывает управляющие и возмущающие воздействия;
- 3 критерии, определяющие величину запаса устойчивости, эти критерии рассмотрены в разд. 2.4.4;
- 4 комплексные критерии, оценивающие обобщенные свойства, например, точность и запас устойчивости.

Рассмотрим точность работы САУ в установившемся режиме, т.е. когда переходная составляющая  $y_n(t)$ , вызванная обработкой воздействия  $x(t)$ , и свободные колебания  $y_c(t)$ , обусловленные ненулевыми начальными условиями (2.96), затухли, т.е.  $y_n(t) = 0$ ,  $y_c(t) = 0$  и

$$y(t) = y_x(t) = c_1^x e^{\alpha_1 t} + c_2^x e^{\alpha_2 t} + \dots + c_s^x e^{\alpha_s t},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  – полюса изображения воздействия  $X(p)$  (2.91);  $c_1^x, c_2^x, \dots, c_s^x$  – коэффициенты, характеризующие свойства воздействия  $x(t)$  и самой системы.

Для устойчивой системы в установившемся режиме, как отмечалось в разд. 2.4.1, ошибка определяется формулой

$$e(t) = \sum_{i=1}^s c_i^e e^{\alpha_i t}, \quad c_i^e = c_i^e - c_i^x, \quad i = \overline{1, s};$$

здесь  $c_i^e$  – "эталонные" коэффициенты входного воздействия.

Расчет коэффициентов  $c_i^x$  и соответственно  $c_i^e$  встречает вычислительные трудности, поэтому  $y(t)$  обычно рассчитывают приближенно по формуле

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{x^{(i)}(t)}{i!}, \quad x^{(i)} = \frac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad (2.103)$$

в которой коэффициенты ошибок системы  $c_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  вычисляются как соответствующие производные от передаточной функции ошибки  $W_y(p) = 1 - W(p)$  при  $p = 0$ , т.е.

$$c_i = \frac{d^i}{dp^i} (1 - W(p)) \Big|_{p=0}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.104)$$

Каждый член ряда в (2.103) характеризует  $i$ -ю составляющую ошибки  $e(t)$ , которая является реакцией САУ на соответствующую производную от воздействия  $x(t)$ .

Если  $x(t) = x_0 \cdot 1(t)$ , то  $e(t) = c_0 x_0$ . Здесь установившаяся ошибка постоянна и зависит от коэффициента статической (позиционной) ошибки  $c_0$ .

В случае  $x(t) = x_0 \cdot 1(t) + x_1 t$  ошибка имеет две составляющие, т.е.

$$e(t) = c_0 x_0 + c_1 x_1,$$

где  $c_1$  – коэффициент скоростной ошибки.

Аналогично при

$$x(t) = x_0 \cdot 1(t) + x_1 t + x_2 t^2$$

$e(t)$  имеет три составляющие и равна

$$e(t) = c_0 x_0 + c_1 x_1 + \frac{1}{2} c_2 x_2,$$

где  $c_2$  – коэффициент ошибки от ускорения.

Если система обрабатывает в установившемся режиме без ошибки входной сигнал

$$x(t) = x_0 \cdot 1(t) + \sum_{i=1}^n x_i t^i,$$

то она называется астатической  $n$ -го порядка.

**Пример 2.2.** Рассмотрим расчет коэффициентов ошибок для САУ с

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}.$$

В этом случае

$$W_e(p) = 1 - \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 - W_{\text{раз}}(p)} = \frac{Tp^2 + p}{Tp^2 + p + K}$$

и коэффициенты ошибок в соответствии с (2.104) равны

$$c_0 = W_e(p) \Big|_{p=0} = 0;$$

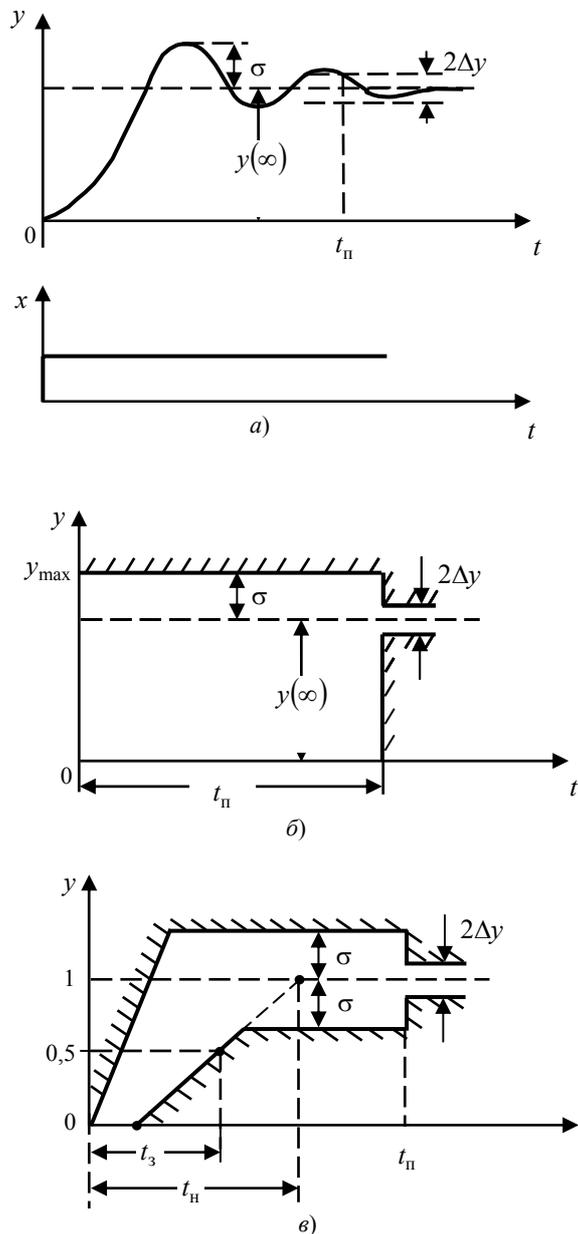
$$c_1 = \frac{d}{dp} W_e(p) \Big|_{p=0} = \frac{1}{K};$$

$$c_2 = \frac{d^2}{dp^2} W_e(p) \Big|_{p=0} = 2 \left( \frac{T}{K} - \frac{1}{K^2} \right)$$

и т.д.

Пусть входной сигнал САУ имеет вид

$$x(t) = x_0 + x_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2.$$



**Рис. 2.27. Показатели качества переходного процесса (а), область его допустимых отклонений (б) и уточненная диаграмма (в)**

Тогда установившаяся ошибка согласно (2.103) определяется выражением

$$e(t) = c_0 x(t) + c_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{1}{K} (x_0 + \beta t) + \frac{\beta}{K^2} (TK - 1).$$

Аналогично определяется установившаяся ошибка относительно возмущающего воздействия.

Важными показателями качества управления в динамических режимах являются быстродействие системы, величина перерегулирования, число колебаний в течение переходного процесса, время запаздывания и время нарастания.

Быстродействие системы определяется *длительностью переходного процесса*  $t_n$ . За время  $t_n$  принимается временной интервал от момента подачи на вход  $x(t) = 1(t)$  до момента, после которого выполняется неравенство

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \Delta y,$$

где  $\Delta y$  – допустимая ошибка в установившемся состоянии (рис. 2.27, а). В качестве ошибки  $\Delta y$  для следящих систем берут 1...5 % от величины скачка на входе.

Наряду с рассмотренными показателями качества на практике широко используются интегральные оценки

$$I_0 = \int_0^{\infty} \Delta y(t) dt, \quad I_1 = \int_0^{\infty} |\Delta y(t)| dt, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \Delta y^2(t) dt;$$

здесь  $\Delta y(t)$  – отклонение  $y(t)$  от установившегося значения после окончания переходного процесса.

Для обобщенной характеристики качества переходного процесса, комплексно учитывающей время  $t_n$ , перерегулирование  $\sigma$  и величину установившегося значения  $y(\infty)$ , используется область допустимых отклонений  $y(t)$  в переходном режиме (рис. 2.27, б).

В ряде случаев графически требования к качеству переходного процесса задаются с помощью уточненной диаграммы, приведенной на рис. 2.27, в. Здесь показаны времена запаздывания  $t_3$  и нарастания  $t_n$ , которые определяются с использованием соответственно значений 0,5 и 1 относительной выходной величины  $y(t)/y(\infty)$ .

## 2.5. НАБЛЮДАЕМОСТЬ, УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Исключительно важное значение при исследовании САУ играет изучение свойств наблюдаемости, идентифицируемости и управляемости. Рассмотрим эти понятия применительно к модели линейной стационарной системы в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az(t) + Bu(t), \quad z(t_0), \quad t \geq t_0; \\ y(t) &= Cz(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (2.105)$$

где  $z \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $y \in R^r$ ,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{r \times n}$ ,  $D \in R^{r \times m}$ .

Обычно размерность  $r$  измеряемого вектора выхода  $y$  меньше размерности  $n$  вектора состояния  $z$ .

Система (2.105) считается *полностью (вполне) наблюдаемой*, если по значениям  $y(t)$ ,  $t \geq t_0$  можно определить (восстановить) вектор  $z(t_0)$ . Если же по  $y(t)$ ,  $t \geq t_0$  можно восстановить лишь часть компонент вектора  $z(t_0)$ , то система называется *не вполне наблюдаемой*.

Для проверки наблюдаемости системы (2.105) из матриц  $A$  и  $C$  составляется матрица наблюдаемости Калмана

$$K_n = \begin{pmatrix} C^T : A^T C^T : (A^T)^2 C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

Критерием полной наблюдаемости является выполнение условия

$$\text{rank}(K_n) = n. \quad (2.107)$$

Если ранг матрицы  $K_n$  равен  $d$  и  $d < n$ , то имеет место неполная наблюдаемость. Отношение  $d/n$  называют *степенью наблюдаемости*. Напомним, что ранг матрицы  $K$  есть такое число  $r$ , что, по крайней мере, один определитель  $r$ -го порядка, получаемый из этой матрицы, отличен от нуля, а все определители  $(r + 1)$ -го порядка равны нулю.

**Пример 2.3.** Проверим на наблюдаемость систему ( $n = 2$ )

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t); \\ y(t) &= (0; 1) \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Матрица наблюдаемости (2.106) для нее

$$K_n = \begin{pmatrix} C^T : A^T C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0) : (0 \ -0,2) \\ (1) : (1 \ -1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0) \\ (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0) : (-0,2) \\ (1) : (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\det K_n = 0,2$ , то  $\text{rank}(K_n) = 2$  и система полностью наблюдаема.

Если для той же системы матрица  $A$  изменялась

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = (0 \ 1),$$

то

$$K_n = \begin{pmatrix} (0) : (0 \ 0) \\ (1) : (1 \ -1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0) \\ (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0) : (0) \\ (1) : (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае  $\det K_n = 0$ ,  $\text{rank}(K_n) = 1$ , система является не вполне наблюдаемой со степенью наблюдаемости 0,5.

Устройства, решающие задачу определения  $z(t_0)$  по значениям  $y(t)$ ,  $t \geq t_0$ , называются *наблюдателями* (наблюдателями устройствами).

Понятие идентифицируемости обычно используется применительно к определению параметров модели. Система (2.105) обладает свойством *параметрической идентифицируемости*, если по результатам измерения выходных величин в течение некоторого времени можно определить параметры математической модели, т.е. элементы матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

Условие совместной наблюдаемости и идентифицируемости системы (2.105) записывается в виде

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C & \vdots & \\ CA & \vdots & O \\ \dots & \vdots & \\ CA^{n-1} & & \\ \hline CA^n & \vdots & \frac{\partial}{\partial a} [CA^n z + \dots] \\ \dots & & \dots \\ CA^{n+n_a-1} & \vdots & \frac{\partial}{\partial a} [CA^{n+n-1} z + \dots] \end{pmatrix} = n + n_a, \quad (2.109)$$

$$n_a = n^2 + nm + nr + mr,$$

где  $a$  – общий вектор модели, содержащий элементы матриц  $A, B, C, D$ ;

$$[CA^n z + \dots] = [CA^n z + C(A^{n-1}Bu + A^{n-2}B\dot{u} + \dots + Bu^{(n-1)}) + Du^{(n)}];$$

...

$$[CA^{n+n_a-1} z + \dots] = [CA^{n+n_a-1} z + C(A^{n+n_a-2}Bu + \dots + Bu^{(n+n_a-2)}) + Du^{(n+n_a-1)}].$$

Свойство управляемости характеризует возможность перевода системы из одного состояния  $z(t_0)$  (значения вектора фазовых координат) в другое  $z(t_1)$  посредством управления. Существуют разные случаи управляемости систем, отличающиеся заданием областей значений для  $z(t_0)$ ,  $z(t_1)$  и наличием ограничений на управление.

Для системы

$$\dot{z} = Az(t) + Bu(t)$$

при отсутствии ограничений в пространстве состояний  $R^n$  и пространстве управлений  $R^m$  управляемость зависит только от значений матриц  $A$  и  $B$ . Если для произвольно заданных состояний  $z(t_0) = z^0$  и  $z(t_1) = z^1$  существует управление, переводящее систему с матрицами  $A, B$  за конечное время  $t_1 - t_0$  из  $z^0$  в  $z^1$ , то система или пара  $(A, B)$  называется *вполне управляемой*.

Для проверки выполнения условия полной управляемости системы (по Калману) составляется матрица управляемости

$$K_y = (B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B). \quad (2.110)$$

Необходимым и достаточным условием полной управляемости системы является выполнение равенства

$$\text{rank}(K_y) = n. \quad (2.111)$$

**Пример 2.4.** Необходимо проверить на управляемость систему (2.108). Проверка по формуле (2.110) показывает

$$K_y = B : AB = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,2 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\det K_y = -1 \quad \text{и} \quad \text{rank}(K_y) = 2;$$

таким образом система вполне управляема.

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то

$$K_y = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det K_y = 0, \quad \text{rank}(K_y) = 1,$$

т.е. условие полной управляемости не выполняется.

Понятие полной управляемости для непрерывных линейных стационарных систем совпадает с понятием достижимости. Состояние  $z^q \neq 0$  считается достижимым из начала координат, если для  $z(t_0)$  существует конечный интервал времени  $[t_0, t_g]$  и управление  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_g]$  такое, что  $z(t_g) = z^q$ . Если для системы все состояния достижимы, то система полностью достижима.

## 2.6. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

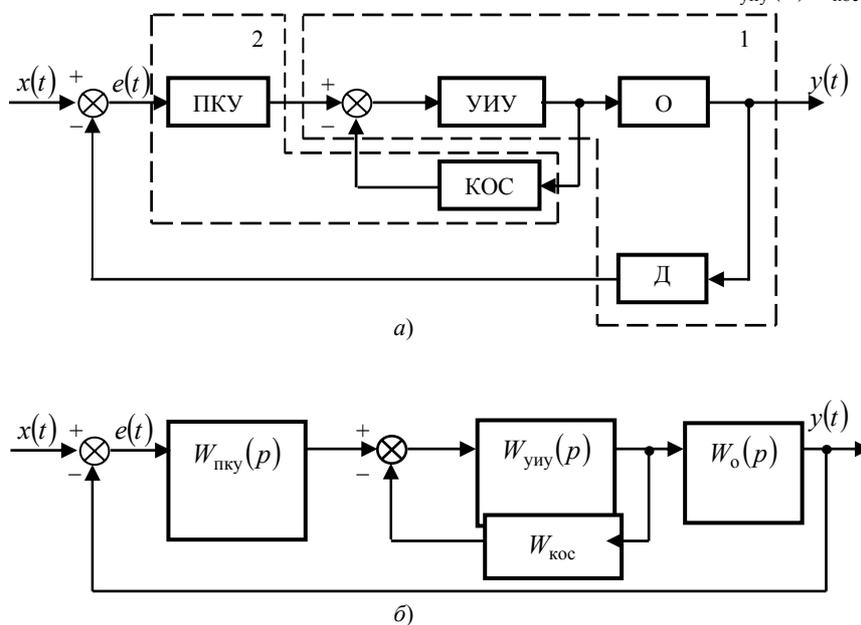
Задачи анализа и синтеза занимают центральное место в теории автоматического управления. Задача синтеза САУ заключается в определении общей структурной схемы управления системы, технических средств ее реализации, включая требования к объекту управления, а также всех параметров, входящих в систему устройств, на основе технических требований, предъявляемых к системе. Выделяют следующие задачи синтеза: синтез алгоритмов (законов) управления на стадии проектирования САУ; синтез управлений в процессе функционирования автоматической системы; синтез регулятора в терминах эталонной системы; синтез корректирующих устройств и др.

Обычно задачи синтеза и анализа решаются в тесной взаимосвязи: в результате синтеза разрабатывается вариант структурной схемы системы управления, затем выполняется ее анализ, на основе результатов анализа вносятся структурные изменения или разрабатывается другой вариант и т.д. такой процесс продолжается до тех пор, пока САУ не будет удовлетворять задаваемым требованиям.

В структурной схеме САУ при решении задач синтеза выделяют две части – неизменяемую и изменяемую (рис. 2.28, а). Неизменяемая часть включает функционально необходимые элементы: объект управления (О), усилительно-исполнительное устройство (УИУ), измерительный элемент или датчик (Д). Иногда неизменяемую часть называют обобщенным (расширенным) объектом. В изменяемую часть обычно входят последовательное корректирующее устройство (ПКУ) и корректирующая обратная связь (КОС).

Для получения передаточной функции САУ схему рис. 2.28, а представляют в виде рис. 2.28, б; здесь  $W_{\text{пкы}}(p)$ ,  $W_{\text{уиу}}$ ,  $W_{\text{кос}}(p)$ ,  $W_o(p)$  соответственно передаточные функции ПКУ, КОС, УИУ и объекта управления. В этом случае передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид

$$W_{\text{раз}}(p) = W_{\text{пкы}}(p) \frac{W_{\text{уиу}}(p)}{1 + W_{\text{уиу}}(p) W_{\text{кос}}(p)} W_o(p). \quad (2.112)$$



**Рис. 2.28. Структурная схема САУ при решении задач синтеза с выделенными неизменяемой (1) и изменяемой частями (2) (а) и приведенная схема для передаточной функции (б)**

Задача синтеза САУ, представленной на рис. 2.28, б, формулируется следующим образом. Для заданных  $W_{\text{уиу}}(p)$ ,  $W_o(p)$  и значений показателей качества системы требуется определить передаточные функции  $W_{\text{пкы}}(p)$  и  $W_{\text{кос}}(p)$ , при которых САУ удовлетворяет задаваемому качеству управления. При этом рассматриваются варианты структур с использованием только ПКУ, только КОС и совместным применением ПКУ с КОС.

При выборе структуры САУ необходимо учитывать, что ПКУ легко реализуются с помощью RC-фильтров. Однако, отдельные RC-фильтры чувствительны к помехам и шумам, кроме того, эффективность их действия существенно снижается при нестабильности параметров элементов, входящих в последовательную цепь  $W_{\text{пкы}}(p)$ ,  $W_{\text{уиу}}(p)$ ,  $W_o(p)$ . От этих недостатков свободна КОС, вместе с тем, стоимость этих корректирующих устройств значительно выше.

Большинство задач синтеза в качестве составных частей включают обеспечение устойчивости, повышение запаса устойчивости, повышение точности в установившемся режиме и улучшение переходных процессов.

Устойчивость и необходимый запас устойчивости обычно обеспечиваются введением форсирующего звена, при этом увеличивается быстродействие системы, но вместе с тем увеличивается и влияние помех. Другой путь обеспечения устойчивости – использование демпфирования с подавлением высоких частот. Для этого вводится апериодическое звено с постоянной времени значительно большей постоянных времени апериодических звеньев разомкнутой системы.

Повышение точности в установившемся режиме (уменьшение установившейся ошибки) достигается увеличением передаточного коэффициента  $K$  разомкнутой системы (добротности системы). При этом необходимо контролировать запас устойчивости, так как при большом значении  $K$  (больше критического) система становится неустойчивой. Для получения астатизма системы используются изодромные звенья. При большой постоянной времени изодрома запас устойчивости практически сохраняется без изменения.

Улучшение переходных процессов обычно достигается введением в прямую цепь дифференцирующих звеньев, что позволяет реализовать работу САУ с прогнозом.

Широкое распространение на практике получили линейные регулирующие устройства, которые в зависимости от сигнала ошибки  $e(t)$  вырабатывают управляющее воздействие  $u(t)$ , используя комбинации последовательного соединения пропорционального (П), интегрирующего (И) дифференцирующего (Д) звеньев. Регуляторы, построенные на основе этих звеньев, приведены в табл. 2.10.

На рис. 2.29 – 2.31 приведены графики переходной и частных характеристик соответственно ПИ-, ПИД-регуляторов и дифференциатора.

Для расчета параметров настройки регуляторов в основном применяется два подхода. Первый подход предполагает точное определение параметров с использованием заданной передаточной функции объекта  $W_o(p)$  и эталонной ПФ  $W_3(p)$ . Эталонная передаточная функция – это такой оператор замкнутой САУ, который обеспечивает требуемое качество процессов управления в переходном и установившемся режимах. Если для разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(p) = W_{\text{рег}}(p) W_o(p),$$

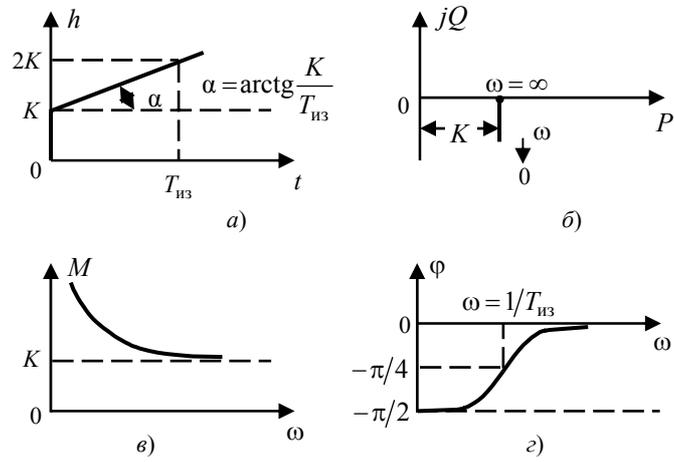
то передаточная функция регулятора, определяющая его структуру и параметры, при данном подходе имеет вид

$$W_{\text{раз}}(p) = W_{\text{рег}}(p) = W_o^{-1}(p) \frac{W_3(p)}{1 - W_3(p)}. \quad (2.113)$$

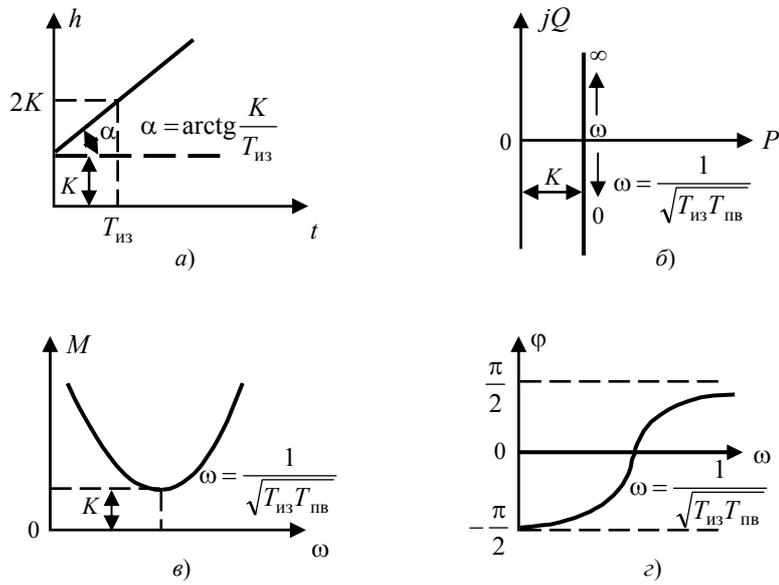
### 2.10. Линейные регуляторы

Наименование управляющего устройства	Передаточная функция	Интегрально-дифференциальное уравнение	Параметры настройки
П-регулятор (пропорциональный)	$W_{\text{п}}(p) = K_{\text{п}}$	$u(t) = K_{\text{п}} e(t)$	$K_{\text{п}}$
И-регулятор (интегральный)	$W_{\text{и}}(p) = \frac{K_{\text{и}}}{p} = \frac{1}{T_{\text{и}} p}$	$u(t) = K_{\text{и}} \int_0^t e(\tau) d\tau$	$K_{\text{и}} = \frac{1}{T_{\text{и}}}$
ПИ-регулятор (изодромный)	$W_{\text{пи}}(p) = K_{\text{п}} + \frac{K_{\text{и}}}{p} = K + \frac{1}{T_{\text{из}} p}$	$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_{\text{из}}} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$	$K_{\text{п}}, T_{\text{из}} = K_{\text{п}} T_{\text{и}}$
ПД-регулятор (пропорциональный с предварением)	$W_{\text{пд}}(p) = K_{\text{п}} + K_{\text{д}} p = K_{\text{п}} (1 + T_{\text{пв}} p)$	$u(t) = K_{\text{и}} e(t) + T_{\text{пв}} \frac{de(t)}{dt}$	$K_{\text{п}}, T_{\text{пв}}$
ПИД-регулятор (пропорционально-интегрально-дифференциальный)	$W_{\text{пид}}(p) = K_{\text{п}} + \frac{1}{T_{\text{и}} p} + K_{\text{д}} p = K \left( 1 + \frac{1}{T_{\text{из}} p} + T_{\text{пв}} p \right)$	$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_{\text{из}}} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_{\text{пв}} \frac{de(t)}{dt} \right)$	$K_{\text{п}}, T_{\text{из}}, T_{\text{пд}}$
Д-управляющее устройство (дифференциатор)	$W_{\text{д}}(p) = \frac{K_{\text{д}} T_{\text{д}} p}{T_{\text{д}} p + 1}$	$T_{\text{д}} \dot{u} + u(t) = K_{\text{д}} T_{\text{д}} \frac{de(t)}{dt}$	$K_{\text{д}}, T_{\text{д}}$

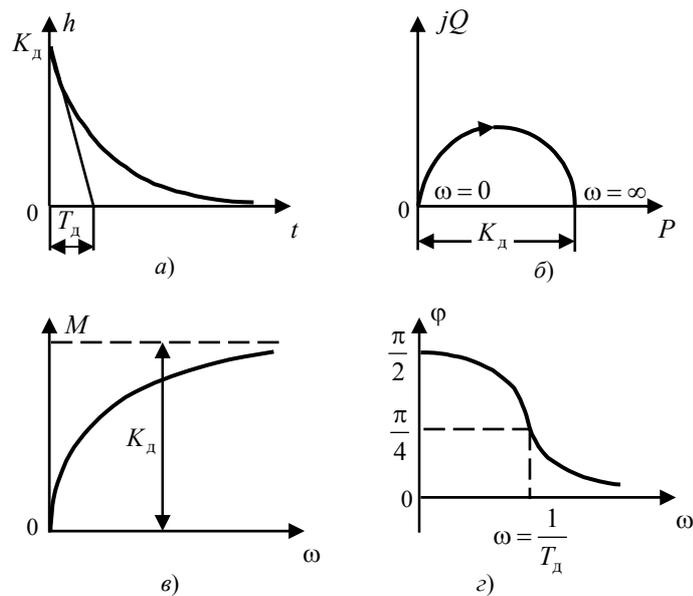
При втором подходе рассматривается приближенное равенство эталонной  $W_3(p)$  и реальной  $W(p)$  передаточных функций замкнутой САУ. Здесь допускается упрощение структуры регулятора, накладываются ограничения на показатели качества работы системы и, используя аналитические выражения связи показателей и параметров методами нелинейного программирования, определяются настройки регуляторов.



**Рис. 2.29. Динамические характеристики ПИ-регулятора:**  
*a* – переходная характеристика  $h(t)$ ; *б* – АФЧХ  $W(jV)$ ;  
*в* – АЧХ  $M(\omega)$ ; *г* – ФЧХ  $\varphi(\omega)$



**Рис. 2.30. Динамические характеристики ПИД-регулятора:**  
*a* – переходная характеристика  $h(t)$ ; *б* – АФЧХ  $W(j\omega)$ ; *в* – АЧХ  $M(\omega)$ ; *г* – ФЧХ  $\varphi(\omega)$



**Рис. 2.31. Динамические характеристики дифференциатора:**  
*a* – переходная характеристика  $h(t)$ ; *б* – АФЧХ  $W(j\omega)$ ;  
*в* – АЧХ  $M(\omega)$ ; *г* – ФЧХ  $\varphi(\omega)$

На практике применяются различные приближенные методики определения параметров настройки регуляторов. В качестве примера рассмотрим методику колебаний Зиглера-Никольса настройки регуляторов для устойчивых объектов, которая заключается в следующем. На реальном объекте с П-регулятором начинают постепенно увеличивать значение коэффициента  $K_p$  до тех пор, пока в замкнутой системе не возникнут колебания. Определяют критическое усиление регулятора  $K_p = K_{кр}$  и период колебаний  $T_k$  на выходе регулятора. Затем приближенные значения параметров находятся в соответствии с рекомендациями табл. 2.11. Здесь предполагается, что передаточная функция объекта может быть представлена в виде

$$W_o(p) = \frac{K_o}{T_o p + 1} e^{-p\tau_o}; \quad (2.114)$$

здесь  $K_o$  – передаточный коэффициент;  $T_o$  – постоянная времени;  $\tau_o$  – время запаздывания.

### 2.11. Определение параметров настройки регулятора по методике колебаний

Закон регулирования	Значение параметров настройки
П	$K_p = 0,5 K_{кр}$
ПИ	$K_p = 0,45 K_{кр}, T_{из} = 0,85 T_k$
ПИД	$K_p = 0,6 K_{кр}, T_{из} = 0,5 T_k, T_{пв} = 0,5 T_k$

Другая методика основана на исследовании переходной функции объекта  $h(t)$  и аппроксимации ее моделью (2.114). Для этого по кривой разгона проводят касательную в точке перегиба, которой соответствует "тангенс максимального наклона" и вычисляют параметры модели объекта

$$K_o = \frac{y_\infty - y(t_0)}{\Delta u}, \tau_o = t_1 - t_0, T_o = t_2 - t_1, \quad (2.115)$$

здесь  $\Delta u$  – величина ступенчатого воздействия, которая берется в пределах 10...20 % от максимального значения;  $t_0$  – момент времени нанесения воздействия;  $t_1, t_2$  – моменты времени, соответствующие пересечению касательной с линиями  $y(t_0)$  и  $y_\infty$ .

В зависимости от полученных значений параметров объекта определяются настройки регуляторов в соответствии с рекомендациями табл. 2.12.

### 2.12. Определение параметров настройки регулятора на основе переходной функции объекта

Закон регулирования	Значение параметров настройки
П	$K_p = \frac{T_o}{K_o \tau_o}$
ПИ	$K_p = 0,9 \frac{T_o}{K_o \tau_o}, T_{из} = 3\tau_o$
ПИД	$K_p = 1,2 \frac{T_o}{K_o \tau_o}, T_{из} = 2\tau_o, T_{пв} = 0,5\tau_o$

При настройке ПИД-регулятора надо учитывать, что интегральная составляющая (И) позволяет обеспечить нулевую ошибку слежения, однако вследствие увеличения фазового сдвига ее действие имеет тенденцию к дестабилизации. Дифференцирующая составляющая (Д) придает регулятору прогнозирующее свойство. За счет того, что управляющее действие пропорционально скорости изменения ошибки обеспечивается стабилизирующий эффект, однако это может приводить к большим управляющим сигналам.

Необходимо отметить, что получаемые параметры настройки с использованием рекомендаций табл. 2.11 и табл. 2.12 следует рассматривать как начальные значения, которые в последующем требуют уточнения применением точных методов, например, методом назначения полюсов.

Рассмотрим задачу синтеза регулятора, который обеспечивает заданное положение полюсов замкнутой системы, во многом определяющих ее динамические свойства применительно к структурной схеме САР, представленной на рис. 2.16. Пусть ПФ регулятора и объекта соответственно имеют вид

$$W_{\text{пер}}(p) = \frac{C(p)}{L(p)}, \quad W_o(p) = \frac{B_o(p)}{A_o(p)}. \quad (2.116)$$

В этом случае полюсы ПФ замкнутой системы являются корнями характеристического уравнения

$$A_o(p)L(p) + B_o(p)C(p) = 0 \quad (2.117)$$

и расположение полюсов задается полиномом

$$A_{\text{це}}(p) = A_o(p)L(p) + B_o(p)C(p). \quad (2.118)$$

Заметим, что уравнение (2.131) называют диофантовым.

Если задан полином  $A_{\text{це}}(p)$  и известны  $A_o(p)$ ,  $B_o(p)$  (модель объекта), то задача синтеза регулятора методом назначения полюсов заключается в определении полиномов  $C(p)$ ,  $L(p)$  таких, что выполнялось равенство (2.118).

**Пример 2.5.** Пусть

$$W_o(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}, \quad W_{\text{пер}}(p) = \frac{c_1 p + c_0}{l_1 p + l_0} \quad \text{и} \quad A_{\text{це}}(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1.$$

В этом случае задача синтеза регулятора методом назначения полюсов состоит в определении параметров  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $l_1$ ,  $l_0$ , при которых в соответствии с (2.118) выполняется равенство

$$(p^2 + 3p + 2)(l_1 p + l_0) + (c_1 p + c_0) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$$

или

$$p^3 l_1 + p^2(3l_1 + l_0) + p(2l_1 + c_1) + 2l_0 + c_0 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1.$$

Данное равенство можно записать в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_0 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В результате его решения получаем

$$l_1 = 1, \quad l_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_0 = 1 \quad \text{и} \quad W_{\text{пер}}(p) = \frac{p+1}{p}.$$

Следует отметить, что ПИД-регулятор с передаточной функцией

$$W_{\text{пид}}(p) = K_p + \frac{K_{\text{и}}}{p} + \frac{K_{\text{д}} p}{T_{\text{д}} p + 1} \quad (2.119)$$

может быть представлен в виде

$$W_{\text{пер}}(p) = \frac{c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{l_2 p^2 + l_1 p} = \frac{c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{p(l_2 p + l_1)}, \quad (2.120)$$

при этом

$$K_p = \frac{c_1 l_1 - c_0 l_2}{l_1^2}; \quad K_{\text{и}} = \frac{c_0}{l_1};$$

$$K_{\text{д}} = \frac{c_2 l_1^2 - c_1 l_1 l_2 + c_0 l_2^2}{l_1^3}; \quad T_{\text{д}} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (2.121)$$

Отметим, что в САУ с КОС различают гибкую и жесткую обратные связи (ОС). Гибкая обратная связь действует только в переходных режимах, а в установившемся как бы происходит ее отключение. Для передаточной функции гибкой

ОС должно выполняться условие  $W_{\text{ос}}(p=0) = 0$ . Например, ОС с  $W_{\text{ос}}(p) = \frac{T_p p}{1 + T_p p}$  является гибкой.

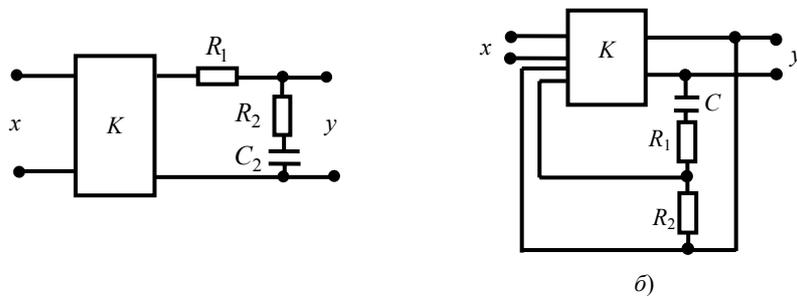


Рис. 2.32. Корректирующие устройства для подавления верхних частот, включаемые последовательно (интегрирующее пассивное звено) (а) и в цепь отрицательной обратной связи (дифференцирующее звено) (б)

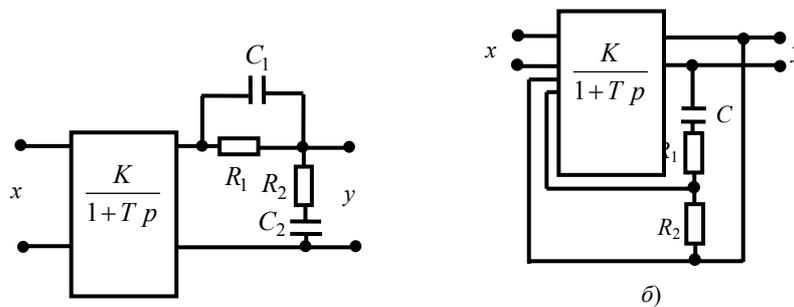


Рис. 2.33. Корректирующие устройства для подавления средних частот, включаемые последовательно (интегро-дифференцирующее звено) (а) и в цепь отрицательной обратной связи (дифференцирующее звено) (б)

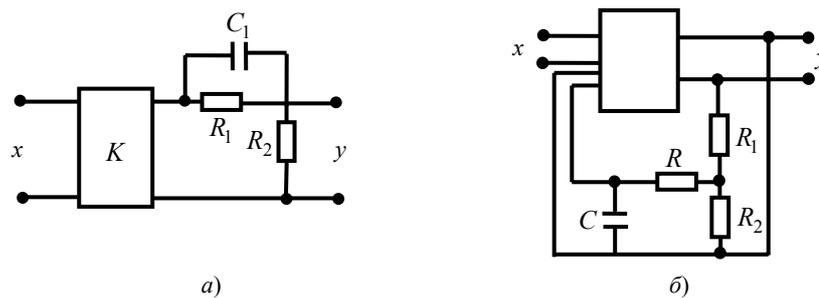


Рис. 2.34. Корректирующие устройства для подавления низких частот, включаемые последовательно (дифференцирующее пассивное звено) (а) и в цепь отрицательной обратной связи (аперiodическое звено) (б)

Жесткая обратная связь действует как в переходном, так и в установившемся режиме, для нее  $W_{oc}(p=0) \neq 0$ . Например,

$$W_{oc}(p) = \frac{K}{1+Tp}.$$

Применение последовательных и параллельных корректирующих устройств позволяет повышать качество управления за счет подавления определенного диапазона частот. На рис. 2.32 – 2.34 даны примеры корректирующих устройств различного назначения с использованием усилителей, обозначенных прямоугольниками.

#### Вопросы для контроля

11. В чем заключается принцип суперпозиции?
12. Какой вид имеют статические характеристики линейных систем?
13. Какие объекты называются объектами с самовыравниванием?
14. В чем различие статических и астатических систем?
15. Можно ли по известной одной динамической характеристике определить все остальные?
16. Чем вызвано применение различных динамических характеристик?
17. Как получить передаточную функцию системы, если для нее известно дифференциальное уравнение?
18. В чем причина широкого использования передаточных функций?
19. Для решения каких задач используются типовые динамические звенья (ТДЗ)?

20. Что означает порядок ТДЗ?
21. Что общего имеет группа интегрирующих ТДЗ?
22. Какие Вы знаете виды соединения звеньев?
23. Какую динамическую характеристику (ДХ) лучше использовать при определенных ДХ системы по известным ДХ звеньев?
24. Какие бывают виды обратных связей?
25. Какова связь между передаточными функциями замкнутой и разомкнутой САУ?
26. Как можно перейти от модели системы в переменных "вход-выход" к модели в пространстве состояний?
27. Каковы основные задачи анализа САУ?
28. Какая система называется устойчивой?
29. Какие Вы знаете алгебраические критерии устойчивости?
30. В чем недостаток алгебраических критериев устойчивости?
31. Какие Вы знаете частотные критерии устойчивости?
32. Как определяется запас устойчивости?
33. С помощью каких критериев оценивается качество работы САУ?
34. В чем состоит свойство наблюдаемости системы?
35. От каких матриц модели динамики системы в пространстве состояний зависит наблюдаемость?
36. Какая система называется управляемой?
37. Как проверяется управляемость системы?
38. Как формулируются задачи синтеза САУ?
39. Какие Вы знаете законы регулирования?
40. Как решаются задачи определения параметров настройки регуляторов?

### **СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ**

- АС – автоматическая система;
- АСУ – автоматизированная система управления;
- АФЧХ – амплитудно-фазовая частотная характеристика;
- АЦП – аналого-цифровой преобразователь;
- АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;
- ДУ – дифференциальное уравнение;
- ДХ – динамическая характеристика;
- ИТ – информационные технологии;
- КОС – корректирующая обратная связь;
- ЛАЧХ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика;
- ЛАХ – логарифмическая амплитудная характеристика;
- ЛФЧХ – логарифмическая фазо-частотная характеристика;
- МСФ – множество состояний функционирования;
- НЭ – нелинейный элемент;
- ПКУ – последовательное корректирующее устройство;
- ПФ – передаточная функция;
- САР – система автоматического регулирования;
- САУ – система автоматического управления;
- СХ – статическая характеристика;
- ТДЗ – типовое динамическое звено;
- УИУ – усилительно-исполнительное устройство;
- УУ – управляющее устройство;
- ФЧХ – фазо-частотная характеристика;

## СПИСОК ОСНОВНЫХ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$A, B, C$  – матрицы линейной модели системы;  
 $e(t)$  – сигнал ошибки системы;  
 $h(t)$  – переходная функция (характеристика);  
 $I$  – единичная матрица;  
 $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица;  
 $K$  – передаточный коэффициент;  
 $L(\omega)$  – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика;  
 $M(\omega)$  – амплитудно-частотная характеристика;  
 $N(t)$  – помеха;  
 $P(\omega)$  – действительная частотная характеристика;  
 $Q(\omega)$  – мнимая частотная характеристика;  
 $R^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство;  
 $S(\omega)$  – спектральная плотность;  
 $t$  – время;  
 $u(t)$  – управляющее воздействие;  
 $W(j\omega)$  – амплитудно-фазовая частотная характеристика;  
 $W(p)$  – передаточная функция;  
 $W(t)$  – функция веса;  
 $W(z)$  – передаточная функция дискретной системы;  
 $x(t)$  – входная переменная, сигнал на входе, вход;  
 $y(t)$  – выходная переменная, сигнал на выходе, выход;  
 $z(t)$  – вектор фазовых координат, переменная состояния;  
 $\delta(t)$  – дельта-функция;  
 $\varphi(\omega)$  – фазо-частотная характеристика;  
 $\omega$  – угловая частота.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического управления. – 4-е изд., перераб. и доп. / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – СПб. : Изд-во "Профессия", 2004. – 752 с.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник. – 2-е изд. перераб. и доп. – В 5 т. – Т. 1 : Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004. – 656 с.
3. Коновалов, Г.Ф. Радиоавтоматика : учебник для вузов по спец. "Радиотехника". – М. : Высш. шк., 1990. – 335 с.
4. Гудвин, Г.К. Проектирование систем управления / Г.К. Гудвин, С.Ф. Греббе, М.Э. Сальгадо. – М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2004. – 911 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ</b> .....	4
1.1. Состав и схемы автоматических систем .....	4
1.2. Примеры систем автоматического управления в радиосвязи .....	8
1.3. Классификация систем автоматического управления .....	12
Вопросы для контроля .....	16
<b>2. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> .....	17
2.1. Статические и динамические характеристики .....	17
2.1.1. Статические характеристики .....	18
2.1.2. Динамические характеристики .....	20
2.2. Характеристики типовых динамических звеньев .....	29
2.2.1. Апериодическое звено первого порядка .....	30
2.2.2. Усилительное звено .....	34
2.2.3. Инерционное звено второго порядка .....	35
2.2.4. Колебательное звено .....	38
2.2.5. Консервативное звено .....	40
2.2.6. Интегрирующие звенья .....	41
2.2.7. Дифференцирующие звенья .....	45
2.2.8. Звено чистого запаздывания .....	48
2.3. Характеристики систем автоматического управления .....	49
2.4. Анализ линейных систем автоматического управления .....	56
2.4.1. Устойчивость. Основные понятия .....	56
2.4.2. Алгебраические критерии устойчивости .....	62
2.4.3. Частотные критерии устойчивости .....	64
2.4.4. Запас устойчивости .....	69
2.4.5. Качество работы систем автоматического управления .....	70
2.5. Наблюдаемость, управляемость .....	76
2.6. Синтез линейных систем автоматического управления .....	79
Вопросы для контроля .....	89
<b>СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ</b> .....	91
<b>СПИСОК ОСНОВНЫХ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ</b> .....	92
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	93

